

Biljana Kërsteska
Jasmina Markoska

MATEMATIKA

për vitin II arsim i mesëm
profesional katërvjeçar

Shëndetësi dhe politikë sociale

Tekstil-lëkurë

Bujqësi, peshkatari dhe veterinari

Shërbime personale

Pylltari dhe përpunimi i drurit

MATEMATIKA

për vitin II

arsim i mesëm profesional katërvjeçar

SEKTORI/PROFESIONI: Shëndetësor/Shëndetësi dhe politikë sociale

Bujqësor-veterinar / Bujqësi, peshkatari dhe veterinar

Shërbime personale, Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ngjashme /Tekstil-lëkurë

Pylltari dhe përpunimi i drurit /Pylltari dhe përpunimi i drurit

Autore:

Biljana Kërsteska, Jasmina Markoska

Recensentë:

Aneta Gacovska

Emilija Boshkovska-Zhivadinoviq

Violeta Peshevsk

Ilustrimet: Biljana Kërsteska, Jasmina Markoska

Titulli i origjinal:

МАТЕМАТИКА

за II година на средното стручно

четиригодишно образование

Здравствена струка

Земјоделско-ветеринарна струка

Лични услуги

Текстилно-кожарска струка

Шумарско-дрвопреработувачка струка

Билјана Крстеска

Јасмина Маркоска

Botues: Ministria e Arsimit dhe Shkencës e Republikës së Maqedonisë së Veriut rr. “Shën Kirili dhe Metodi” nr. 54 1000 Shkup.

Përkthyer nga gjuha maqedonase: Muzafer Beqiri

Redaktor profesional i botimit në gjuhën shqipe: Xhevair Beqiri

Lektor: Refail Sulejmani

Redaktimi grafik dhe teknik: Leon Xhingo, Evgenija Pavlova - ARS STUDIO

Redaktor: Refail Sulejmani

Vendi dhe viti i botimit: Shkup 2023

Me vendimin për lejimin e tekstit shkollor MATEMATIKA, për vitin II të arsimit të mesëm profesional katërvjeçar (SEKTORI/PROFESIONI: Shëndetësor/Shëndetësi dhe politikë sociale, Bujqësor-veterinar / Bujqësi, peshkatari dhe veterinar, Shërbime personale, Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ngjashme / Tekstil-lëkurë, Pylltari dhe përpunimi i drurit /Pylltari dhe përpunimi i drurit). Nr. 26-303/1 të datës 8.7.2022 të miratuar nga Komisioni kombëtar për tekste shkollore.

PARATHËNIE

Teksti MATEMATIKA për vitin e dytë të arsimit të mesëm profesional katërvjeçar është shkruar sipas programit mësimor për lëndën e detyrueshme të përmendur. I dedikuar për nxënësit nga profesioni Shëndetësi, profesioni Bujqësor-veterinare, Shërbime personale, profesioni Tekstil-lëkurë dhe Pylltari – përpunimi i drurit.

Autoret tentojnë t'i përpunojnë përmbajtjet e parashikuara në pajtim me udhëzimet didaktike-metodike për realizimin e programit. Teksti është modulare e dizajnuar dhe përbëhet prej tetë tërësive tematike:

- RRËNJËT
- FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE NË TREKËNDËSHIN KËNDËDREJTË
- NUMRAT KOMPLEKS
- BARAZIMI KATROR
- BARAZIMET E LLOJIT KATROR. BARAZIMET IRACIONALE. SISTEMI PREJ NJË BARAZIMI KATROR DHE NJË BARAZIMI LINEAR ME DY TË PANJOHURA
- FUNKSIONI KATROR, PABARAZIMI KATROR, SISTEMI PREJ DY PABARAZIMEVE KATRORE ME NJË TË PANJOHUR
- VEKTORËT NË RRAFSH. FIGURAT GJEOMETRIKE NË HAPËSIRË
- SYPRINA DHE VËLLIMI I TRUPAVE GJEOMETRIK

Në kuadër të çdo teme mësimore janë punuar përmbajtjet e parapara, të cilat, sipas rregull, janë ilustruar me shembuj të zgjidhur dhe vizatime. Në fund të çdo njësie mësimore janë dhënë detyra për punë të pavarur ose për detyrë shtëpie, që paraqet vazhdimë të punës së orës, kurse në fund të çdo teme mësimore janë dhënë detyra për përsëritje dhe përforcim të materialit. Zgjidhjet dhe përgjigjet e detyrave, kurse sipas zgjedhjes së autoreve, diku edhe udhëzime për zgjidhjen e tyre, janë dhënë në fund të tekstit mësimor.

Autoret prej përpara do të jenë të falënderuar për çdo kritikë me qëllim të mirë ose vërejtje për përmirësimin e përmbajtjes, pasi besojnë se ky tekst do të kontribuojë që nxënësit më shumë ta duan matematikën dhe të hyjnë në fshehtësitë e saj.

Autoret

1. RRËNJËT

1.1. Koncepti për rrënjë

Konceptet rrënja katrore dhe kubike prej numrit të dhënë pozitiv tanimë i ke të njohur prej arsimit fillor. Mbetet ta zgjerojmë atë koncept deri te rrënja n prej numrit real.

Përkufizimi. Numri real pozitiv x , për të cilin vlen $x^n = a$, ku a është numër real pozitiv dhe $n \in \mathbb{N}$ quhet **rrënja katrore n prej numrit a** dhe shënohet me $x = \sqrt[n]{a}$.

Poashtu, n quhet **treguesi i rrënjës**, kurse a quhet **shprehja nënrrënjë ose radikand**.

Shembull 1. Rrënja $\sqrt[4]{16}$ ka tregues të rrënjës 4, shprehja nënrrënjë 16 dhe $\sqrt[4]{16} = 2$, pasi $2^4 = 16$, kurse $\sqrt[5]{100000} = 10$, pasi $10^5 = 100000$!

Operacioni me të cilin e caktojmë vlerën e $\sqrt[n]{a}$ kur na janë të njohura vlerat e n dhe a , quhet **rrënjëzim**.

Nëse $n = 2$, atëherë në vend $\sqrt[2]{6}$ shkruajmë $\sqrt{6}$ dhe lexojmë **rrënja katrore** e numrit 6 ose vetëm **rrënjë** e numrit 6.

Detyra 1. Njehso:

a) $\sqrt{25}$, b) $\sqrt[3]{27}$, c) $\sqrt[4]{81}$.

Zgjidhje. !) $\sqrt{25} = 5$ pasi $5^2 = 25$, **b)** $\sqrt[3]{27} = 3$ pasi $3^3 = 27$, **c)** $\sqrt[4]{81} = 3$ pasi $3^4 = 81$!

Prej përkufizimit vijon se $\sqrt[n]{a}$, ku $a > 0$ dhe $n \in \mathbb{N}$ është numër pozitiv i atillë ku fuqia n është e barabartë me a d.m.th. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Ngjashëm edhe $\sqrt[n]{a^n} = a$, ku $a > 0$ dhe $n \in \mathbb{N}$, pasi $a^n = (a)^n$.

Shembulli 2. $(\sqrt[3]{3})^3 = 3$ dhe $\sqrt[6]{b^6} = b$, për $b > 0$!

Le të jetë n numër çift natyror. Të mundshme janë këto situata:

- Nëse $a > 0$, atëherë ekzistojnë dy numra realë të kundërt për të cilët vlen $x^n = a$ dhe me $\sqrt[n]{a}$ e shënojmë numrin pozitiv (e quajmë **rrënja n e numrit a**), kurse me $-\sqrt[n]{a}$ numri i tij i kundërt.
- Nëse $a = 0$, atëherë ekziston numër real i vetëm x (numri 0) ashtu që $x = \sqrt[n]{0}$.
- Nëse $a < 0$, atëherë nuk ekziston numër real x , ashtu që $x^n = a$, pra sipas kësaj shprehjeje $\sqrt[n]{a}$ nuk ka kuptim.

Le të jetë n numër natyror tek. Atëherë ekziston numër real i vetëm x ashtu që $x^n = a$, për çfarëdo numër real a .

Shembulli 3. Rrënjët $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$ dhe $\sqrt[8]{-32}$ nuk kanë kuptim në bashkësinë e numrave realë, rrënjët $\sqrt[3]{-343}$, $\sqrt[15]{-1}$ dhe $\sqrt[7]{-128}$ kanë kuptim dhe mund të njehsohen, kurse rrënja $\sqrt[6]{x+2}$ ka kuptim për të gjithë numrat realë x për të cilët vlen $x+2 \geq 0$ d.m.th., $x \geq -2$!

Prandaj, për n numër natyror çift vlen ky rregull:

$$\sqrt[n]{a^n} \begin{cases} a, & \text{për } a \geq 0 \\ -a, & \text{për } a < 0 \end{cases}$$

Kur n është numër natyror tek vlen $\sqrt[n]{a^n} = a$, për çdo numër real a .

Detyra 2. Thjeshtoji shprehjet:

a) $\sqrt[4]{(-3)^4}$, **b)** $\sqrt[12]{(-1)^{12}}$, **c)** $\sqrt[6]{4^6}$, **ç)** $\sqrt[3]{(-2)^3}$, **d)** $\sqrt{(x+1)^2}$

Zgjidhje. a) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$, pasi $n = 4$ është numër çift dhe $a = -3 < 0$,

b) $\sqrt[12]{(-1)^{12}} = |-1| = 1$, pasi $n = 12$ dhe $a = -1 < 0$,

c) $\sqrt[6]{4^6} = 4$, pasi $n = 6$ dhe $a = 4 \geq 0$,

ç) $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$, pasi $n = 3$ është numër tek,

d) $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{për } x \geq -1 \\ -(x+1), & \text{për } x < -1 \end{cases} \cdot \blacklozenge$

Detyra

1. Njehso:

a) $\sqrt{121}$, **b)** $\sqrt[4]{0,0016}$, **c)** $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$, **ç)** $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$.

2. Cilët prej këtyre rrënjëve kanë kuptim në bashkësinë e numrave realë?

a) $\sqrt[4]{-0,01}$, **b)** $\sqrt[3]{-125}$, **c)** $\sqrt[6]{\frac{6^2}{(-2)^3}}$, **ç)** $\sqrt{\frac{2}{3} - \frac{3}{4}}$.

3. Cilët prej këtyre rrënjëve kanë kuptim në bashkësinë e numrave realë?

a) $\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{5}}$, **b)** $\sqrt[3]{3 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}}$, **c)** $\sqrt[4]{0,01 - 0,0(1)}$, **ç)** $\sqrt[12]{\frac{1}{2,3-7^2}}$

4. Për cilat vlera të shprehjes nënrrënjë, rrënja ka kuptim?

a) $\sqrt[5]{2x+3}$, **b)** $\sqrt[4]{20+4x}$, **c)** $\sqrt[3]{2x+1}$, **ç)** $\sqrt[6]{(x-2)(x+3)}$

5. Thjeshto:

a) $\sqrt[2]{(-2)^4}$, **b)** $\sqrt{\frac{1600}{(-200)^2}}$, **c)** $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{8}\right)^3}$, **ç)** $\sqrt{(16-2x)^2}$ për $x \geq 8$.

1.2. Zgjerimi dhe thjeshtimi rrënjëve

Në vazhdimë do të shqyrtojmë disa veti të rrënjëve me ndihmën e të cilave në të ardhmen do të mund të kryejmë transformime dhe thjeshtime.

Teorema. Nëse a është numër real pozitiv, kurse m , n dhe k janë numra natyrorë, atëherë vlen $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n-k]{a^{m-k}}$ (**zgjerim** të rrënjës $\sqrt[n]{a^m}$ me numrin natyror k).

Me të vërtetë, për nk fuqia e numrit $\sqrt[n]{a^m}$ kemi:

$$(\sqrt[n]{a^m})^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m} \right)^n \right]^k = (a^m)^k = a^{mk}.$$

Sipas përkufizimit për rrënjën vijon se $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n-k]{a^{m-k}}$. $\blacklozenge$

Shembulli 1. Rrënja $\sqrt[3]{2}$ e zgjeruar me 5 është $\sqrt[3 \cdot 5]{2^{1 \cdot 5}} = \sqrt[15]{2^5}$, ndërsa tani rrënja $\sqrt[5]{3^5}$ e zgjeruar me 2 është $\sqrt[2 \cdot 5]{3^{5 \cdot 2}} = \sqrt[10]{3^{10}}$. ♦

Detyra 1. Rrënjët $\sqrt[3]{ab^2}$ dhe $\sqrt[4]{a^3b}$ zgjeroji deri te treguesi i përbashkët më i vogël, ku $a, b > 0$

Zgjidhje. Prej kësaj që sHVP (3,4) = 12 fitohet se rrënja e parë duhet të zgjerohet me 4, kurse e dyta me 3, pra fitohen rrënjët

$$\sqrt[3]{ab^2} = \sqrt[3 \cdot 4]{(ab^2)^{1 \cdot 4}} = \sqrt[12]{a^4b^8} \text{ dhe } \sqrt[4]{a^3b} = \sqrt[4 \cdot 3]{(a^3b)^{1 \cdot 3}} = \sqrt[12]{a^9b^3}, \text{ përkatësisht. } \blacklozenge$$

Ngjashëm me teoremën paraprake vërtetohet edhe teorema vijuese:

Teorema. Nëse a është numër real pozitiv, kurse m, n dhe k janë numra natyrorë të atillë që $k|n$ dhe $k|m$, atëherë $\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$ (**thjeshtimi** i rrënjës $\sqrt[n]{a^m}$ me numrin natyror k).

Shembulli 2. Rrënja $\sqrt[9]{27}$ mund të thjeshtohet me 3, pra fitohet rrënja $\sqrt[9 \cdot 3]{3^{3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{3}$, kurse rrënja $\sqrt[12]{2^4}$ mund të thjeshtohet me 4 deri te rrënja $\sqrt[3]{2}$. ♦

Detyra 2. Rrënjët dhe $\sqrt[15]{a^{10}b^5}$ dhe $\sqrt[20]{a^{35}b^{10}}$ thjeshtojë treguesin më të madh të përbashkët të rrënjës, ku $a, b > 0$. ♦

Zgjidhje. Pasi PMP(15,20) = 5 rrënjët do t'i thjeshtojmë me 5 dhe kemi $\sqrt[15]{a^{10}b^5} = \sqrt[15 \cdot 5]{(a^2b)^{5 \cdot 5}} = \sqrt[75]{(a^2b)^{25}} = \sqrt[3]{a^2b}$ dhe $\sqrt[20]{a^{35}b^{10}} = \sqrt[20 \cdot 5]{(a^7b^2)^{5 \cdot 5}} = \sqrt[100]{(a^7b^2)^{25}} = \sqrt[4]{a^7b^2}$, përkatësisht. ♦

Shembulli 3. $\sqrt[9]{(-2)^{15}} = \sqrt[3]{(-2)^5}$, kurse $\sqrt[8]{(-2)^{12}} \neq \sqrt[4]{(-2)^3}$, pasi $\sqrt[4]{(-2)^3}$ nuk ka kuptim në bashkësinë e numrave realë, kurse $\sqrt[8]{(-2)^{12}} = \sqrt[2]{3}$. ♦

Prandaj, në situatat e këtilla, d.m.th., kur $a < 0$, n dhe k janë çift, kurse m numër natyror tek gjatë thjeshtimit të rrënjës gjithmonë duhet të kemi parasysh se rrënja pas thjeshtimit a ka kuptim në bashkësinë e numrave realë, përkatësisht duhet të shfrytëzojmë barazimin $\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{|a|^m}$.

Detyra

1. Rrënjët e dhëna zgjeroji me 3:

a) $\sqrt[5]{3^4}$, b) $\sqrt[3]{a^2b}$, për $a, b > 0$, c) $\sqrt[4]{(-2x)^2y^3}$, për $x, y > 0$.

2. Rrënjët e dhëna zgjeroji me 4:

a) $\sqrt[8]{16}$, b) $\sqrt[16]{a^{20}b^8}$, për $a, b > 0$, c) $\sqrt[4]{(-4x^{12})^{20}y^{16}}$ për $x, y > 0$.

3. Rrënjët e dhëna zgjeroji përkatësisht deri te shumëfishi më i vogël i përbashkët të treguesve të rrënjëve të tyre:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ dhe $\sqrt[4]{4}$, b) $\sqrt[6]{\frac{a^2b}{3}}$, $\sqrt[4]{\frac{ab^2}{4}}$ dhe $\sqrt[3]{2ab}$, për $a, b > 0$.

4. Rrënjët e dhëna zgjeroji me pjesëtuesin më të madh të përbashkët të treguesve të rrënjëve të tyre:

a) $\sqrt[3]{27a^6}$, $\sqrt[9]{8a^9b^3}$ dhe $\sqrt[6]{125b^9}$, për $a, b > 0$,
b) $\sqrt[6]{9a^4b^8}$, $\sqrt[8]{81a^6b^{12}}$ dhe $\sqrt[4]{a^{10}b^2}$, për $a, b > 0$.

5. Thjeshtoji rrënjët:

a) $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^6}$, b) $\sqrt[4]{a^2}$, c) $\sqrt[6]{\frac{4a^2+4a+1}{0,04a^4b^2}}$, për $a, b \neq 0$.

1.3. Rrënjëzimi i prodhimit dhe herësit

Teorema. Nëse a dhe b janë numra realë pozitivë dhe n është numër natyror, atëherë $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ dhe $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Me të vërtetë, për fuqinë n të $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ kemi:

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b,$$

kurse për fuqinë n të $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ kemi: $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$

Sipas përkufizimit për rrënjën kjo do të thotë se $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ dhe $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. ♦

Shembulli 1. $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$. ♦

Duke pasur parasysh faktin se rrënja me tregues çift nuk ka kuptim në bashkësinë e numrave realë nëse shprehja nënrrënjë është numër negativ, gjithmonë kur $a < 0$, $b < 0$ dhe n është numër natyror, vlen $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$ dhe $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$.

Është e njohur se nëse n është numër natyror tek, $\sqrt[n]{a}$ ekziston për çdo numër real a , pra sipas kësaj barazimi prej teoremës shfrytëzohet pa vlerën absolute.

Të përfundojmë, barazimet $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ dhe $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, për a dhe b numra realë pozitivë, n është numër natyror, dhe $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$ dhe $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$, për a dhe b numra realë negativë dhe n është numër natyror çift, **quhen rregulla për shumëzimin dhe pjesëtimin e rrënjëve të cilat kanë tregues të njëjtë të rrënjës.**

Detyra 1. Thjeshtojë shprehjen:

a) $\sqrt[4]{16a^8}$, për $a \neq 0$, b) $\sqrt[5]{\frac{a^{35}}{-b^{10}}}$, për $b \neq 0$.

Zgjidhje. a) $\sqrt[4]{16a^8} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{a^8} = 2 \cdot a^2$, b) $\sqrt[5]{\frac{a^{35}}{-b^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{a^{35}}}{\sqrt[5]{-b^{10}}} = -\frac{a^7}{b^2}$. ♦

Shembulli 2. Vlera e $\sqrt{(-36) \cdot (-49)} = \sqrt{|36|} \cdot \sqrt{|-49|} = 6 \cdot 7 = 42$, kurse për $a < 0$ fitohet $\sqrt{-\frac{25}{16}a} = \sqrt{\left|-\frac{25}{16}\right|} \cdot \sqrt{|a|} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} \cdot \sqrt{|a|} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{|a|}$. ♦

Detyra 2. Njehso vlerën e shprehjes: **a)** $\sqrt[4]{81 \cdot (-1) \cdot (-x^8)}$

b) $\sqrt[3]{(-8) \cdot (-64) \cdot (-125)}$.

Zgjidhje. a) $\sqrt[4]{81 \cdot (-1) \cdot (-x^8)} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{|-1|} \cdot \sqrt[4]{|-x^8|} = 3 \cdot 1 \cdot x^2 = 3x^2$,

b) $\sqrt[3]{(-8) \cdot (-64) \cdot (-125)} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{-64} \cdot \sqrt[3]{-125} = -2 \cdot (-4) \cdot (-5) = -40$. ♦

Detyra 3. Për cilat vlera të ndryshores x vlejné këto barazime?

a) $\sqrt{x \cdot (x+1)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}$, **b)** $\sqrt{x \cdot (x^2+1)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2+1}$,

c) $\sqrt[3]{x \cdot (x^2+2)} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+2}$.

Zgjidhje. a) Patjetër të gjitha rrënjët të kenë kuptim në bashkësinë e numrave realë, Prandaj, e kërkojmë prerjen prej intervaleve të cilat janë zgjidhje të pabarazimeve $x > 0$, $x+1$ dhe $x \cdot (x+1) > 0$ d.m.th., $x > 0$,

b) Pasi $x^2+1 > 0$ për çdo vlerë të $x \in \mathbb{R}$, patjetër $x > 0$,

c) Për çdo vlerë të ndryshores x . ♦

Detyra 4. Njehso vlerën e shprehjes:

a) $\sqrt[4]{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt[4]{1-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{5-\frac{1}{2}}$, **b)** $\sqrt[4]{12a^5} : \sqrt[4]{3a^2}$, për $a > 0$.

Zgjidhje. Sipas teoremës kemi:

a) $\sqrt[4]{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt[4]{1-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{5-\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(5-\frac{1}{2}\right)} =$
 $= \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{3}{2}$,

b) $\sqrt[4]{12a^5} : \sqrt[4]{3a^2} = \sqrt[4]{\frac{12a^5}{3a^2}} = \sqrt[4]{4a^3}$, për $a > 0$. ♦

Shembulli 3. Prodhimi $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}$ mund të njehsohet vetëm nëse rrënjët kanë tregues të njëjtë të rrënjës, pra përkatësisht i zgjerojmë deri te shumëfishi më i vogël i përbashkët të treguesve të rrënjëve, d.m.th., numri 6. Në këtë mënyrë prodhimi transformohejt deri $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^5}$. ♦

Detyra

1. Njehso:

a) $\sqrt{16 \cdot 25 \cdot 64}$, **b)** $\sqrt[3]{1000 \cdot a^3}$,

c) $\sqrt{\frac{0,01}{441}}$, **ç)** $\sqrt[5]{\frac{32a^{15}}{b^{20}c^{10}}}$, për $b, c \neq 0$.

2. Njehso:

a) $\sqrt{a^3b^2} \cdot \sqrt{a^7b^5c^4}$, për $a, b, c > 0$, **b)** $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{6a^2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3}$.

c) $\sqrt[5]{4a^2b^3} : \sqrt[5]{2ab}$ për $a, b \neq 0$, **ç)** $\sqrt[4]{32a^5b^3} : \sqrt[4]{2a^4b^5}$ për $a, b > 0$.

3. Njehso:

a) $\sqrt{64 \cdot (-25) \cdot (-36)}$,

b) $\sqrt[4]{\frac{-81}{x}}$, për $x < 0$,

c) $\sqrt[5]{\frac{-32x^5y^{15}}{z^{20}}}$, për $z \neq 0$,

d) $\sqrt{\frac{(x-1)^4}{x(x^2+1)^2}}$, për $x > 0$.

4. Njehso:

a) $\sqrt[3]{2x^2} \cdot \sqrt[4]{3x^2y}$, për $x, y > 0$,

b) $\sqrt[3]{4x^2y} : \sqrt[6]{2xy^3}$, për $x, y > 0$.

5. Cakto për cilën vlerë të ndryshores x vlejné barazimet:

a) $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$

b) $\sqrt{x^2(x-1)^2} = x \cdot (x-1)$

1.4. Nxjerrja e shumëzuesit para shenjës së rrënjës, futja e shumëzuesit nën shenjën e rrënjës dhe forma normale e rrënjës

Nëse te rrënja $\sqrt[n]{A}$, shprehja nën rrënjë A mund të shkruhet në formën $a^{m \cdot n} \cdot b$, ku, $a, b > 0$, kurse m dhe n janë numra natyrorë, atëherë mund të zbatohen teoremat për rrënjëzim të prodhimit $\sqrt[n]{a^{m \cdot n}} \cdot \sqrt[n]{b}$ dhe thjeshtim të rrënjës së dhënë $a^m \cdot \sqrt[n]{b}$. Transformimi të cilin e kryejmë në këtë mënyrë quhet **nxjerrja e shumëzuesit para shenjës së rrënjës**.

Për fuqinë n të $a^m \cdot \sqrt[n]{b}$ kemi:

$$(a^m \cdot \sqrt[n]{b})^n = (a^m)^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a^{m \cdot n} \cdot b.$$

Sipas përkufizimit për rrënjë vlen $\sqrt[n]{a^{m \cdot n} \cdot b} = a^m \cdot \sqrt[n]{b}$ sipas kësaj vlen kjo teoremë:

Teorema. Nëse a dhe b janë numra realë pozitivë, kurse n dhe m janë numra natyrorë, atëherë vlen $\sqrt[n]{a^{m \cdot n} \cdot b} = a^m \cdot \sqrt[n]{b}$.

Posaçërisht, nëse $m = 1$, atëherë $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$.

Shembulli 1. Le të jetë $a, b, c > 0$. Atëherë

a) $\sqrt[3]{8a^4b^3c^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^3 \cdot a \cdot b^3 \cdot c^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{c^2} = 2ab^3\sqrt[3]{ac^2}$ dhe themi se $2ab$ është shumëzues i cili është nxjerrë para shenjës së rrënjës $\sqrt[3]{ac^2}$,

b) $\sqrt{28a^3b^5} = \sqrt{2^2 \cdot 7 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^{2 \cdot 2} \cdot b} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^{2 \cdot 2}} \cdot \sqrt{b} = 2ab^2\sqrt{7ab}$ dhe themi se $2ab^2$ është shumëzues i cili është nxjerrë para shenjës së rrënjës $\sqrt{7ab}$,

c) $\sqrt[3]{\frac{a^3b^4}{125c^6}} = \frac{\sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{5^3 \cdot \sqrt[3]{c^{2 \cdot 3}}}} = \frac{ab^3\sqrt[3]{b}}{5c^2}$ dhe themi se $\frac{ab}{5c^2}$ është shumëzues i cili është nxjerrë para shenjës së rrënjës $\sqrt[3]{b}$,

d) $\sqrt[4]{48 \cdot (x-1)^4} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3 \cdot (x-1)^4} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{(x-1)^4} = 2|x-1|\sqrt[4]{3}$ dhe themi se $2|x-1|$ është shumëzues i cili është nxjerrë para shenjës së rrënjës $\sqrt[4]{3}$. ♦

Gjatë zgjidhje së disa detyrave paraqitet nevoja shumëzuesin, i cili gjendet para shenjës së rrënjës, ta futim nën shenjën e rrënjës. Për këtë qëllim atë shumëzues e fuqizojmë me treguesin e rrënjës dhe shprehjen e fituar pastaj e shumëzojmë me madhësinë nënrrënjësore. Ky transformim quhet **futja e shumëzuesit nën shenjën e rrënjës** dhe vlen kjo teoremë:

Teorema. Nëse a dhe b janë numra realë pozitivë, kurse n dhe m janë numra natyrorë, atëherë vlen $a^m \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{m \cdot n} \cdot b}$.

Shembulli 2. a) $3\sqrt{3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{27}$,

b) $a^3\sqrt{a^2} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^5}$,

c) $ab\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \sqrt{(ab)^2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = \sqrt{(ab)^2 \cdot \frac{a+b}{ab}} = \sqrt{ab(a+b)}$, për $a, b > 0$,

ç) $\frac{1}{x^2} \sqrt[4]{\frac{1}{x}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{x^2}\right)^4 \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt[4]{\frac{1}{x^9}}$, për $x > 0$. ♦

Përkufizimi. Për rrënjën e dhënë themi se është në **formën normale**, nëse shprehja nën rrënjë nuk përmban emërues dhe shumëzues të cilët mund të nxirren para shenjës së rrënjës, dhe ka tregues më të vogël të mundshëm të rrënjës.

Shembulli 3. Te forma normale janë rrënjët $\sqrt{6}$, $3a^3\sqrt{2a^2}$ dhe $\sqrt[4]{4a^3}$, për $a > 0$, kurse nuk janë në formën normale këto rrënjë, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[9]{8a^6}$ dhe $\sqrt[4]{16x}$, për $x > 0$.

Shembulli 4. a) $2a\sqrt{\frac{3}{a}} = 2a\sqrt{\frac{3}{a} \cdot \frac{a}{a}} = 2a\sqrt{\frac{3a}{a^2}} = 2a \cdot \frac{1}{a}\sqrt{3a} = 2\sqrt{3a}$, për $a > 0$,

b) $\sqrt[4]{\frac{4a^2b^4}{(a^2-1)^2}} = \sqrt[4]{\frac{2^2a^2b^4}{(a^2-1)^2}} = \sqrt{\frac{2ab^2}{(a^2-1)} \cdot \frac{(a^2-1)}{(a^2-1)}} = \frac{b}{a^2-1}\sqrt{2a(a^2-1)}$ për $a > 1$ dhe $b > 0$,

c) $\sqrt{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a^2+1}} = \sqrt{\frac{a-1}{a^2-1} + \frac{1}{a^2-1}} = \sqrt{\frac{a-1+1}{a^2-1}} = \sqrt{\frac{a}{a^2-1} \cdot \frac{a^2}{a^2-1}} = \frac{1}{a^2-1}\sqrt{a(a^2-1)}$, për $a > 1$,

ç) $\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a^4-a^3}{b^4-b^3}} = \frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a^3(a-1)}{b^3(b-1)}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{a-1}{b-1} \cdot \frac{(b-1)^2}{(b-1)^2}} = \frac{1}{b-1}\sqrt[3]{(a-1)(b-1)^2}$ për $a \neq 0$, $b \neq 0$ dhe $b \neq 1$ ♦

Kur një rrënjë është shkruar në formën normale, shumëzuesi racional para shenjës së rrënjës quhet **koeficient** para rrënjës. Poashtu, dy ose më shumë rrënjë të shkruara në formën normale janë **të ngjashme** nëse kanë koeficient të ndryshëm, d.m.th., kanë treguesin e njëjtë të rrënjës dhe shprehjen nën rrënjë të njëjtë.

Detyra 1. Cilat prej këtyre rrënjëve janë të ngjashme?

a) $\sqrt{3}$ dhe $\sqrt{12}$, **b)** $\sqrt{\frac{a}{2}}$ dhe $\sqrt{\frac{2}{a}}$, për $a > 0$,

c) $\sqrt{\frac{3}{8}}$, $\sqrt{45}$ dhe $\sqrt{216}$, c) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, $\sqrt{60}$ dhe $\sqrt{\frac{1}{15}}$.

Zgjidhje. Së pari të gjitha rrënjët i shkruajmë në formën normale, kurse pastaj kontrollojmë a janë të ngjashëm.

a) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$, pra $\sqrt{3}$ dhe $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ janë të ngjashëm pasi dallohen vetëm te koeficientët para shenjës së rrënjës, d.m.th., koeficienti i $\sqrt{3}$ është 1, kurse koeficienti i $2\sqrt{3}$ është 2,

b) $\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{2a}}{2}$ dhe $\sqrt{\frac{2}{a}} = \sqrt{\frac{2}{a} \cdot \frac{a}{a}} = \frac{\sqrt{2a}}{2}$ janë të ngjashëm pasi $\frac{\sqrt{2a}}{2}$ ka koeficient $\frac{1}{2}$, kurse $\frac{\sqrt{2a}}{2}$ ka koeficient $\frac{1}{a}$,

c) $\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\sqrt{216} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 6}$ dhe $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$. Nuk janë të ngjashëm pasi $3\sqrt{5}$. Nuk ka shprehje nënrrënjësore të njëjtë me dy rrënjët e tjera,

c) $\sqrt{2\frac{1}{4} \cdot 15} = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot 15} = \frac{3}{2}\sqrt{15}$, $\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15}$ dhe $\sqrt{\frac{1}{15}} = \sqrt{\frac{1}{15} \cdot \frac{15}{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$ janë të ngjashme. ♦

Detyra

1. Nxirre shumëzuesin para shenjës së rrënjës:

a) $\sqrt{50}$, b) $\sqrt[3]{0,024}$, c) $\sqrt[4]{\frac{2x^5}{y^6}}$, për $x, y > 0$, c) $\sqrt[5]{\frac{64a^8}{81b^{13}}}$, $b \neq 0$

2. Fute shumëzuesin nën shenjën e rrënjës:

a) $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{7}}$, b) $3ab^2 \sqrt{\frac{12}{ab}}$ për $a, b > 0$,

c) $\frac{a+1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - a^3}{a+1}}$, për $a > 0$, c) $\frac{2x^2}{3} \sqrt[4]{\frac{27a^2}{4x^2}}$, për $x \neq 0$.

3. Rrënjët e dhëna shkruaji në formën normale:

a) $\frac{x-y}{x} \sqrt{\frac{1}{xy-y^2}}$, për $x > y > 0$, b) $\frac{2bc}{3xy} \sqrt{\frac{9x^3y^4}{8bc}}$, për $x, y, b, c > 0$,

c) $\sqrt[3]{\frac{a}{a^2-2ab+b^2}}$, për $a \neq b$, c) $\sqrt[5]{\frac{32}{a^3}}$, për $a \neq 0$.

4. Cilat prej këtyre rrënjëve janë të ngjashëm, për $a, b > 0$?

a) $\sqrt[4]{9a^2b^4}$ dhe $\sqrt[6]{27a^3b^6}$, b) $\sqrt{50ab^2}$ dhe $\sqrt{120a^3}$,

c) $\sqrt[3]{\frac{27b}{a^2}}$ dhe $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$.

5. Vërteto se janë rrënjë të ngjashme $\frac{3}{a}\sqrt{a^3b}$, $\frac{2}{a}\sqrt{ab^5}$ dhe $ab\sqrt{\frac{1}{a^3b}}$, për $a, b > 0$.

1.5. Operacionet me rrënjë

Mbledhja dhe zbritja e rrënjëve

Mblidhen, përkatësisht zbriten vetëm rrënjët e ngjashme. Poashtu operacioni përkatës (mbledhja ose zbritja) kryhet me koeficientët e tyre.

Shembulli 1. a) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5) \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$,

b) $(3\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{8a} - 11\sqrt[3]{27a}) = 3\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{2^3a} - 11\sqrt[3]{3^3a} =$
 $= 3\sqrt[3]{a} + 10\sqrt[3]{a} - 33\sqrt[3]{a} = (3 + 10 - 33) \cdot \sqrt[3]{a}$, për $a > 0$,

c) $2\sqrt{a^3} + \frac{3}{a}\sqrt{a^5} - \frac{3}{b}\sqrt{b^3} + \sqrt{b} = 2a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} - 3\sqrt{b} + \sqrt{b} =$
 $= (2a + 3a)\sqrt{a} + (-3 + 1)\sqrt{b} = 5a\sqrt{a} - 2\sqrt{b}$, për $a, b > 0$

ç) $2a^3\sqrt[4]{a^4b} - 3a^3\sqrt[4]{ab^4} - a^2\sqrt[4]{\frac{b^4}{a^2}} + 2b^3\sqrt[4]{\frac{a}{b^2}} = 2a^3\sqrt[4]{a^3 \cdot a \cdot b} - 3a^3\sqrt[4]{a \cdot b^3 \cdot b} - a^2\sqrt[4]{\frac{b^3 \cdot b}{a^2} \cdot \frac{a}{a}} + 2b^3\sqrt[4]{\frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{b}} =$
 $= 2a^2\sqrt[4]{ab} - 3ab\sqrt[4]{ab} - ab\sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{ab} =$
 $= (2a^2 - 3ab - ab + b^2)\sqrt[4]{ab} = (2a^2 - 4ab + ab^2)\sqrt[4]{ab} = 2(a - b)^2\sqrt[4]{ab}$, për $a, b > 0$. ♦

Shumëzimi dhe pjesëtimi i rrënjëve

Shumëzohen, përkatësisht pjesëtohen rrënjët të cilat kanë tregues të njëjtë të rrënjës. Poashtu operacioni përkatës (shumëzim ose pjesëtim) realizohen me shprehjet nënrrënjësore të tyre dhe prodhimi përkatësisht herësi ka tregues të njëjtë të rrënjës.

Shembulli 2. a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 2} = \sqrt[3]{10}$

b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5}$, për $a > 0$,

c) $(\sqrt[5]{8} : \sqrt[3]{2}) = \sqrt[15]{8^3} : \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{\frac{(2^3)^3}{2^5}} = \sqrt[15]{2^4}$

ç) $\sqrt[4]{\frac{2a^3}{b^3}} : \sqrt[6]{\frac{2a}{b}} = \sqrt[12]{\left(\frac{2a^3}{b^3}\right)^3} : \sqrt[12]{\left(\frac{2a}{b}\right)^2} = \sqrt[12]{\frac{8a^9}{b^9} : \frac{4a^2}{b^2}} =$
 $= \sqrt[12]{\frac{8a^9}{b^9} \cdot \frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt[12]{\frac{2a^7}{b^7} \cdot \frac{b^5}{b^5}} = \frac{1}{b} \sqrt[12]{2a^7b^5}$, për $a, b > 0$.

Fuqizimi dhe rrënjësimi i rrënjës

Teorema vijuese i cakton rregullat për fuqizim dhe rrënjëzim të rrënjës.

Teorema. Nëse a është numër real pozitiv, kurse m dhe n janë numra natyrorë, atëherë vlejné barazimet: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ dhe $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.

Me të vërtetë, për n fuqia e $(\sqrt[n]{a})^m$ kemi:

$$\left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^{n \cdot m} = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^m = a^m.$$

Prej përkufizimit për rrënjë kemi se $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

Ngjashëm, për nm fuqia e $\sqrt[n]{m}\sqrt{a}$ kemi:

$$\left(\sqrt[n]{m}\sqrt{a}\right)^{n \cdot m} = \left(\left(\sqrt[n]{m}\sqrt{a}\right)^n\right)^m = \left(\sqrt{a}\right)^m = a$$

Prej përkufizimit për rrënjë kemi se $\sqrt[n]{m}\sqrt{a} = \sqrt[n]{m}\sqrt{a} \cdot \diamond$

Barazimin $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ e quajmë rregull për fuqizim të rrënjës, kurse $\sqrt[n]{m}\sqrt{a} = \sqrt[n]{m}\sqrt{a}$ rregull për rrënjëzim të rrënjës.

Shembulli 3.

a) $(\sqrt[3]{2})^4 = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2},$

b) $(\sqrt{a^3b})^3 = \sqrt{a^9b^3} = a^3b\sqrt{ab},$ për $a, b > 0,$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5},$

ç) $\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2} \cdot 2} = \sqrt[4]{8},$

d) $\sqrt[3]{5x\sqrt{xy}} = \sqrt[3]{5x} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{xy}} = \sqrt[6]{25x^2} \cdot \sqrt[6]{xy} = \sqrt[6]{25x^3y},$ për $x, y > 0. \diamond$

Detyra 1. Kryeji operacionet e shënuara:

a) $16\sqrt{2x} \cdot \frac{1}{4}\sqrt[3]{4x},$ për $x > 0,$

b) $\left(\sqrt[a]{\frac{1}{2}} + \sqrt{2a} + 2\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{2}{a}}\right) \cdot \sqrt{2a},$ për $a > 0$

c) $(\sqrt[4]{8a^6b^9} - ab\sqrt[6]{8a^4b^5} + ab^2\sqrt[4]{2a^{4b}}) : \sqrt[4]{2ab},$ për $a, b > 0$

ç) $\sqrt[3]{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4}} : \sqrt[3]{a\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}},$ për $a > 0.$

Zgjidhje. a) $16\sqrt{2x} \cdot \frac{1}{4}\sqrt[3]{4x} = 16 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt[6]{(2x)^3} \cdot \sqrt[6]{(4x)^2} = 4\sqrt[6]{2^3 \cdot x^3 \cdot 2^4 \cdot x^2} =$
 $= 4 \cdot 2 \cdot \sqrt[6]{2x^5} = 8\sqrt[6]{2x^5},$

b) $\left(\sqrt[a]{\frac{1}{2}} + \sqrt{2a} + 2\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{2}{a}}\right) \cdot \sqrt{2a} =$
 $= a\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2a} + \sqrt{2a \cdot 2a} + 2\sqrt{\frac{a}{2} \cdot 2a} - \sqrt{\frac{2}{a} \cdot 2a} =$
 $= a\sqrt{a} + 2a + 2a - 2 = a\sqrt{a} + 4a - 2,$

c) $(\sqrt[4]{8a^6b^9} - ab\sqrt[6]{8a^4b^5} + ab^2\sqrt[4]{2a^{4b}}) : \sqrt[4]{2ab} =$
 $= \sqrt[4]{\frac{8a^6b^9}{2ab}} - ab\sqrt[12]{\frac{(8a^4b^5)^2}{(ab)^3}} + ab^2\sqrt[4]{\frac{2a^{4b}}{2ab}} =$
 $= \sqrt[4]{4a^5b^8} - ab\sqrt[12]{8a^5b^7} + ab^2\sqrt[4]{a^3} = ab^2\sqrt{2} - ab\sqrt[12]{8a^5b^7} + ab^2\sqrt[4]{a^3},$

ç) $\sqrt[3]{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4}} : \sqrt[3]{a\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = (\sqrt[3]{\sqrt{a^2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^4}}) : (\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^2}}) =$
 $= (\sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^4}) : (\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[9]{a^2}) = \sqrt[18]{\frac{(a^2)^3 \cdot (a^4)^3}{a^6 \cdot a^3 \cdot (a^2)^2}} \cdot \diamond$

Detyra

1. Njehso:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2, & \text{b)} (1 - \sqrt{a})^2 \text{ për } a > 0, & \text{c)} (1 - 2\sqrt{3})^2, \\ \text{ç)} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, & \text{d)} \sqrt[4]{a^3 \sqrt[3]{a^2 \sqrt{a}}}, \text{ për } a > 0. \end{array}$$

2. Njehso:

$$\begin{array}{l} \text{a)} 3a^4 \sqrt[4]{a^3} \cdot 2a^2 \sqrt[4]{a}, \text{ për } a > 0, \\ \text{b)} \sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^3 bc^2}, \text{ për } a, b, c > 0, \\ \text{c)} } 6a^4 \sqrt{a^2 - b^2} : (-3a^4 \sqrt{a + b}), \text{ për } a > 0, |b| < a \\ \text{ç)} \sqrt[3]{a^2 b^5 c^4} : \sqrt{ab^2 c^2}, \text{ për } a, b, c > 0. \end{array}$$

3. Njehso:

$$\begin{array}{l} \text{a)} 3\sqrt{2} + 5\sqrt{8} - \sqrt{128} + \sqrt{32}, \\ \text{b)} } a\sqrt{\frac{1}{a}} + 2\sqrt{a} - 5\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} + (a+1)\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}, \text{ për } a > 1, \end{array}$$

4. Kryeji operacionet e shënuara:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt[3]{\frac{12}{25} \sqrt{\frac{244}{15(38^2 - 23^2)}}}, & \text{b)} \sqrt{a^6 \sqrt{a^5}} + \sqrt[4]{a^3 \sqrt[3]{a^2}} - 2\sqrt[3]{a^2 \sqrt[4]{a^3}} \end{array}$$

$$5. \text{ Njehso: } \sqrt{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^2} : (\sqrt[4]{a^7} \cdot \sqrt[12]{a^{11}}), \text{ për } a > 0.$$

1.6. Racionalizimi i emëruesit të thyesës

Në praktikë shpesh hasen shprehje të cilat te emëruesi përmbajnë të paktën një rrënjë. Mënyra me të cilën shprehjet e këtilla i shkruajmë me shprehje të cilat janë identike me ato dhe poashtu nuk përmbajnë rrënjë te emëruesi quhet **racionalizimi i emëruesit të thyesës**.

Për të realizuar atë mënyra duhet emëruesin e thyesës ta zgjerojmë me shprehje të atillë ashtu që shprehja e re, te emëruesi, nuk do të përmbajë rrënjë.

Nëse thyesa ka emërues $\sqrt[n]{A^m}$, ku $m < n$, atëherë e zgjerojmë me $\sqrt[n]{A^{n-m}}$, pasi prodhimi $\sqrt[n]{A^m} \cdot \sqrt[n]{A^{n-m}} = A$ nuk përmban rrënjë.

Shembulli 1. a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ do ta racionalizojmë nëse thyesën e zgjerojmë me $\sqrt{2^{2-1}} = \sqrt{2}$, pra

$$\text{kemi: } \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{b)} \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \text{ do ta zgjerojmë me } \sqrt[3]{5^{3-1}} = \sqrt[3]{5^2} \text{ dhe kemi: } \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

$$\text{c)} \frac{3}{\sqrt[5]{a^{11}}} \text{ së pari do ta nxjerrim shumëzuesin para shenjës së rrënjës, d.m.th., } \frac{3}{a^2 \sqrt[5]{a}}, \text{ kurse}$$

pastaj do ta zgjerojmë thyesën me $\sqrt[5]{a^4}$, pra kemi: $\frac{3}{a^2\sqrt[5]{a}} = \frac{3}{a^2\sqrt[5]{a}} \cdot \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^4}} = \frac{3\sqrt[5]{a^4}}{a^3}$, për $a > 0$. ♦

Nëse thyesa ka emërues të llojit $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, $A + \sqrt{B}$ ose $A - \sqrt{B}$, atëherë e zgjerojmë me $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, $A - \sqrt{B}$, $A + \sqrt{B}$ përkatësisht, për ta shfrytëzuar formulën $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Shembulli 2. a) thyesën $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ do ta zgjerojmë me $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, pra kemi:

$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$. Te prodhimi i emëruesit mund ta shfrytëzojmë formulën $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, pra kemi:

$$\frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3^2}-\sqrt{2^2}} = \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 5(\sqrt{3}-\sqrt{2}),$$

$$\text{b)} \frac{2x-4y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}} = \frac{2x-4y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2y}}{\sqrt{x}+\sqrt{2y}} = \frac{(2x-4y)(\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{\sqrt{x^2}-\sqrt{(2y)^2}} =$$

te emëruesi fitohet shprehja e cila mund të thjeshtohet me numëruesin, pra kemi:

$$= \frac{2(x-2y)(\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{x-2y} = 2(\sqrt{x} + \sqrt{2y}), \text{ për } x, y > 0 \text{ dhe } x \neq -2y. \text{ ♦}$$

Kjo do të thotë se nëse te emëruesi i thyesës kemi shprehje $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, atëherë së pari mund ta zgjerojmë me $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, kurse pastaj me $A - \sqrt{B}$, por mund të punojmë edhe në këtë mënyrë: së pari ta zgjerojmë me $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, kurse pastaj me $\sqrt{A^2 - B}$. Në mënyrë analoge realizohet edhe për thyesën me emërues $\sqrt{A} - \sqrt{B}$.

Detyra

1. Racionalizo emëruesin e thyesës:

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{12}}$,

b) $\frac{23}{5-\sqrt{2}}$,

c) $\frac{xy}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$, për $x, y > 0$ dhe $x \neq y$,

ç) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^3}}$, për $a > 0$,

d) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$,

dh) $\frac{5}{3-2\sqrt{2}}$,

e) $\frac{a^2-4b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}$ për $a, b > 0$,

1.7. Fuqia me tregues numër racional

Përkufizimi. Nëse a është numër real pozitiv $\frac{m}{n}$ është numër racional ku m është numër i plotë, kurse n numër natyror, atëherë $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ quhet **fuqi me tregues numër racional**.

Posaçërisht, nëse $m = 1$, atëherë $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Nëse i kemi parasysh operacionet me fuqi, atëherë vlejné barazimet:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Shembulli 1. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $8^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{8^{-3}}$, $64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2}$ janë shembuj të disa fuqive të shkruara si rrënjë. ♦

Shembulli 2. $(\sqrt{100} = 100^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{(8a)^4} = (8a)^{\frac{4}{3}}$, $\sqrt[5]{9x^2} = (3x)^{\frac{2}{5}}$ janë shembuj të disa rrënjëve të shkruara si fuqi. ♦

Prej fuqisë me tregues numër i plotë veln $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$, pra $a^{-\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$

Sipas kësaj, vlen:

Teorema 1. Nëse a është numër real pozitiv dhe $\frac{m}{n}$ është numër racional, ku m është i plotë, kurse n numër natyror, atëherë $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$

E keni të njohur se shënimi i numri racional me thyesën $\frac{m}{n}$. Nuk është i njëjtershëm. Për shembull, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}, \dots$ Prej kësaj që për çdo numër pozitiv a vlejné barazimet:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n \cdot k} = a^{m \cdot k} \text{ dhe } \left(a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}}\right)^{n \cdot k} = a^{m \cdot k}, \text{ ku } m \text{ është numër i plotë, kurse } n \text{ dhe } k \text{ janë}$$

numra natyrorë, mund të përfundojmë se numrat pozitivë $a^{\frac{m}{n}}$ dhe $a^{\frac{mk}{nk}}$ kanë të njëjtë nk fuqi. Kjo do të thotë se kur shkruajmë fuqi me tregues numër racional, paraqitja nuk varet prej asaj cila thyesë, është e barabartë me $\frac{m}{n}$, do ta shfrytëzojmë.

Shembulli 3. $9^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{9^3} = \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3.$ ♦

Shembulli 4. a) $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$, kurse për $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ kemi:

$(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 2.$ Domethënë, fitojmë $(-8)^{\frac{1}{3}} \neq (-8)^{\frac{2}{6}}$ që nuk është e mundshme,

b) $(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9}$ nuk ka kuptim në bashkësinë e numrave realë. ♦

Vërejtje. Shprehja $a^{\frac{m}{n}}$, për a numër real negativ dhe $n \neq 1$ nuk është përkufizuar.

Teorema 2. Për çdo numër real pozitiv a dhe b dhe për çdo $\frac{m}{n}$ dhe $\frac{p}{q}$ numra racionalë, ku m dhe p janë të plotë, kurse n dhe q janë numra natyrorë, vlejné këto barazime:

1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m+p}{n \cdot q}},$

2) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m-p}{n \cdot q}},$

3) $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}},$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}},$

5) $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot q}}.$

Me të vërtetë, prej përkufizimit për fuqi me tregues racional dhe rregullat për operacione me rrënjë, kemi:

$$\begin{aligned}
 1) \quad a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{pn}{qn}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} + \frac{pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}, \\
 2) \quad a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{mq}{nq}} : a^{\frac{pn}{qn}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} - \frac{pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}, \\
 3) \quad (ab)^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}, \\
 4) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}, \\
 5) \quad (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[q]{(a^{\frac{m}{n}})^p} = \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}} = \sqrt[q \cdot n]{a^{mp}} = \sqrt[q \cdot n]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{qn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}. \blacklozenge
 \end{aligned}$$

Detyra 1. Njehso:

$$a) 81^{0,25}, \quad b) 3^{-2} \cdot 27^{\frac{1}{3}}, \quad c) \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25} + (0,027)^{\frac{2}{3}} + \left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}, \quad d) \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}\right) : a^{\frac{1}{4}} \text{ për } a, b > 0$$

Zgjidhje. a) $81^{0,25} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$ ose $81^{0,25} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3^{4 \cdot \frac{1}{4}} = 3^1 = 3$,

b) $3^{-2} \cdot 27^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^2} \cdot \sqrt[3]{27} = \frac{1}{3^2} \cdot 3 = \frac{1}{3}$

c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25} + (0,027)^{\frac{2}{3}} + \left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot (-\frac{1}{4})} + \left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{5}{4}\right)^{3 \cdot (-\frac{2}{3})} =$
 $= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = 2 + \frac{9}{100} + \frac{16}{25} = \frac{273}{100} = 2,73$,

d) $\left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}\right) : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{12}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = (a^5 b^2)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a^5 b^2}$

Detyra

1. Shkruaji si rrënjë këto shprehje:

a) $x^{-\frac{1}{4}}$, **b)** $a^{-0,5}$, **c)** $(x+1)^{\frac{3}{2}}$, **d)** $(x-y)^{-\frac{3}{4}}$, **e)** $\sqrt[4]{(a-b)^{-n}}$.

2. Janë dhënë rrënjët të shkruara në formë të fuqive me tregues racional:

a) $\sqrt[3]{a}$, **b)** $n^{-1}\sqrt{a^2}$, **c)** $\sqrt{\frac{1}{a^3}}$, **d)** $\sqrt[m]{x^{-2}}$, **e)** $\sqrt[4]{(a-b)^{-n}}$

3. Kryeji operacionet e shënuara me fuqi:

a) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} : x^{-0,25}$, **b)** $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$, **c)** $9^{-\frac{1}{2}} + 0,25^{-\frac{3}{2}}$.

4. Njehso:

a) $(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})$, **b)** $(x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{2}{3}}) : x^{\frac{1}{2}}$,

c) $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^2$, **d)** $(a^{\frac{2}{3}} + 1)^3$

5. Thjeshtojë shprehjen:

$$\text{a) } \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}\right)^{-2}, \quad \text{b) } \left(16a^{\frac{3}{2}}b^{-2}\right)^{\frac{3}{4}}$$

1.8. Shprehjet iracionale

Deri tani u njohtëm me këto gjashtë operacione me numra: mbledhje, shumëzim, zbritje, pjesëtim, fuqizim (me numër natyror dhe tregues të plotë) dhe rrënjëzim. Të gjitha këto operacione quhen, me emrin e përbashkët, **operacione algjebrike**, prej të cilave pesë të parat quhen edhe **operacione algjebrike racionale**, kurse rrënjëzimi – **operacion algjebrik iracional**.

Përkufizimi. Shprehjet të cilat janë përfaqësuar numër herë përfundimtar vetëm operacione racionale, quhen **shprehje racionale**, kurse shprehjet të cilat përveç operacioneve është përfaqësuar edhe operacioni rrënjëzim, quhen **shprehje iracionale**.

Me emër të përbashkët shprehjet racionale dhe iracionale i quajmë **shprehje algjebrike**.

Shembulli 1. Shprehjet racionale janë: $2ab - 3a^2$, $5x^4y^{-2} + 3$, $\frac{x^2y-3}{x^2+1}$, kurse shprehje iracionale janë shprehjet: $2 + \sqrt{3}$, $5x - \sqrt[3]{xy^2}$. ♦

Shprehjet iracionale, njëjtë sikurse edhe racionale, mund të përmbajnë ndryshore, ose të mos përmbajnë ndryshore. Fushën e përkufizimit D të çdo shprehje iracionale, d.m.th., bashkësinë e vlerave të ndryshore (ndryshoreve) për të cilat shprehja iracionale e dhënë ka kuptim, do ta caktojmë prej kushteve: shprehja nënrrënjësore e rrënjëve me tregues çift të rrënjës të jenë jonegativ dhe emëruesi të shprehjeve të jenë të ndryshme prej zeros.

Shembulli 2. Fushën e përkufizimit të shprehjes iracionale $e \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{x+5}+3}{x-4}$ caktojmë prej kushteve: $x + 5 \geq 0$, $x \neq 0$ dhe $x - 4 \neq 0$, përkatësisht: $x \geq -5$, $x \neq 0$ dhe $x \neq 4$. Domethënë, kemi $D = [-5, \infty) \setminus \{0, 4\}$. ♦

Në të gjitha detyrat të cilat duhet t'i kryejmë operacionet dhe t'i thjeshtojmë shprehjet, përveç nëse nuk është theksuar ndryshe, do të llogarisim se tanimë është caktuar fusha e përkufizimit të ndryshore (ndryshoreve).

Detyra 1. Kryejni operacionet e shënuara dhe thjeshtojë shprehjen:

$$\text{a) } -2y^3\sqrt{\frac{x}{y^2}} : 3x\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \text{b) } \left(\frac{1}{\sqrt{1-a}} - \sqrt{1+a}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - 1\right).$$

Zgjidhje. a) Së pari **ke** ja определиме дефиниционата област на изразите. Така, од $\frac{y}{x} \geq 0$, следува дека $y \geq 0$ и $x > 0$, или $y \leq 0$ и $x < 0$. Јасно, од $y^2 \neq 0$ следува дека и $y \neq 0$. Domethënë, $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dhe $xy > 0$. (SEGA) i sjellim rrënjët e dhëna në tregues të njëjtë të rrënjës, kurse pastaj njehsojmë herësin, pra kemi:

$$\begin{aligned} -2y^3\sqrt{\frac{x}{y^2}} : 3x\sqrt{\frac{y}{x}} &= -2y^3\sqrt{\left(\frac{x}{y^2}\right)^2} : 3x\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} = \frac{-2y}{3x}\sqrt{\frac{y^4}{y^3}} = \\ &= \frac{-2y}{3x}\sqrt{\frac{x^5}{y^7} \cdot \frac{y^5}{y^5}} = \frac{-2y}{3xy^2}\sqrt{(xy)^5} = \frac{-2}{3xy}\sqrt{(xy)^5}, \end{aligned}$$

b) Për fushën e përkufizimit kemi

$$1 - a > 0 \text{ d.m.th. } a < 1 ;$$

$$1 + a \geq 0 \text{ d.m.th. } a \geq -1 ;$$

$$1 - a^2 > 0 \text{ d.m.th. } -1 < a < 1 \text{ dhe}$$

$$1 - \sqrt{1 - a^2} \neq 0 \text{ d.m.th. } a \neq 0 .$$

Domethënë, fusha e përkufizimit është $D = (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Për $a \in D$, shprehjet i sjellim në emërues të përbashkët, kurse pastaj i thjeshtojmë:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{1-a}} - \sqrt{1+a} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - 1 \right) = \\ & = \left(\frac{1}{\sqrt{1-a}} - \frac{\sqrt{1+a} \cdot \sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-a}} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a}} \right) : \left(\frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} \right) = \\ & = \frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{1 - \sqrt{1-a^2}} = \frac{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} = \sqrt{1+a} . \diamond \end{aligned}$$

Te detyrat e këtij lloji duhet të zbatohen operacionet me rrënjë, në mënyrë korrekte të kryhen rend ii operacioneve dhe në fund rrënjët, nëse ka, të shkruhen në formën normale.

Detyra

1. Cakto fushën e përkufizimit të shprehjeve:

a) $\frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{x+2}}}{x-3},$

b) $\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x}}{x+2},$

c) $\frac{\sqrt{2x-1} + x}{\sqrt{x+3}},$

2. Vërteto se: $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 4$

3. Kryeji operacionet e shënuara dhe thjeshtoj shprehjen:

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) \cdot (\sqrt{6}+11).$$

4. Kryeji operacionet e shënuara dhe thjeshtoj shprehjen:

$$\frac{a^2 - 4}{a - 2\sqrt{2a} + 2} : \frac{a + \sqrt{8a} + 2}{12}, \text{ për } a = 26.$$

5. Cakto numrin natyror më të vogël, për të cilin është përkufizuar shprehja $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x-1}}$

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Njehso:

a) $\sqrt{65^2 - 63^2},$

b) $\sqrt[7]{128},$

c) $\sqrt[4]{0,0081},$

d) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{135}$

2. Cilat prej këtyre rrënjëve kanë kuptim në bashkësinë e numrave realë?

a) $\sqrt[4]{-625},$

b) $\sqrt[8]{\frac{3^4}{(-9)^3}},$

c) $\sqrt[3]{7 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}},$

d) $\sqrt[5]{-3,25}$

3. Për cilat vlera të ndryshores x , rrënja ka kuptim?

a) $\sqrt[5]{x+5}$, b) $\sqrt[4]{12-4x}$, c) $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}$, ç) $\sqrt[4]{(2x-4)(x+6)}$

4. Thjeshto:

a) $\sqrt[6]{(-6)^6}$, b) $\sqrt{\frac{100}{(-2)^2}}$, c) $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{27}\right)^3}$, ç) $\sqrt[4]{16x^4}$, për $x \leq 0$.

5. Rrënjët e dhëna zgjeroji me 5:

a) $\sqrt[3]{3^2}$, b) $\sqrt[5]{a^4b}$, për $a, b > 0$, c) $\sqrt[4]{(-3x)^6y^2}$ për $x, y > 0$.

6. Thjeshtoji rrënjët:

a) $\sqrt[16]{64}$, b) $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}}$, c) $\sqrt[4]{(-6x^{12})^{10}y^{12}}$, për $x, y > 0$.

7. Rrënjët e dhëna zgjeroji përkatësisht deri te shumëfishi më i vogël i përbashkët të treguesve të tyre të rrënjëve:

a) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$ dhe $\sqrt[4]{2}$, b) $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2b^4}{5}}, \sqrt[4]{\frac{a^3b^2}{4}}\right)$ dhe $\sqrt[6]{\frac{a^3b}{5}}$ për $a, b > 0$

8. Rrënjët e dhëna thjeshtoji me pjesëtuesin më të madh të përbashkët të treguesve të tyre të rrënjëve, për $a, b > 0$:

a) $\sqrt[4]{81a^6}$, $\sqrt[6]{64a^{18}b^6}$ dhe $\sqrt[12]{25a^{10}}$, b) $\sqrt{9a^4b^8}$, $\sqrt[4]{81a^6b^{12}}$ dhe $\sqrt[6]{25a^{10}b^2}$.

9. Njehso:

a) $\sqrt[3]{-64 \cdot x^3}$, b) $\sqrt{\frac{0,09}{289}}$, c) $\sqrt[5]{\frac{32a^{15}}{b^{20}c^{10}}}$ për $b, c \neq 0$, ç) $\sqrt{a^4b^2} \cdot \sqrt{a^8b^6c^{14}}$ për $a, b, c > 0$
d) $\sqrt[3]{27a^3} \cdot \sqrt[3]{64a^2} \cdot \sqrt[3]{25a} \cdot \sqrt[3]{5a^6}$, dh) $\sqrt[4]{8x^5y^2} : \sqrt[6]{4xy^2}$, për $x, y > 0$, e) $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{x(x^2+3)^2}}$, për $x > 0$.

10. Cakto për cilën vlerë të ndryshores x vlejné barazimet:

a) $\sqrt{(3x+2)^2} = 3x+2$, b) $\sqrt{4x^2(x+1)^2} = 2x \cdot (x+1)$,

11. Nxirre shumëzuesin para shenjës së rrënjës:

a) $\sqrt{90}$, b) $\sqrt[3]{0,054}$, c) $\sqrt[4]{\frac{8x^9}{y^8}}$, për $x, y > 0$, ç) $\sqrt[5]{\frac{243a^9}{64b^{12}}}$, $b \neq 0$.

12. Fute shumëzuesin nën shenjën e rrënjës:

a) $5 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5} + \frac{2}{7}}$, b) $\frac{a+3}{a^2} \sqrt{\frac{a^5-a^4}{a+3}}$ për $a > 0$, c) $\frac{2x^2}{3} \sqrt[4]{\frac{27a^2}{4x^2}}$, për $x \neq 0$.

13. Rrënjët e dhëna shkruaji në formën normale:

a) $\frac{6a^2b}{5c^3} \sqrt[3]{\frac{5c^{10}}{6a^7b^4}}$, për $a, b, c > 0$, b) $\frac{2ay}{3xb} \sqrt[4]{\frac{9x^3b^4}{8a^2y^3}}$, për $x, y, a, b > 0$,

14. Njehso, për $a, b, c > 0, |b| < a$:

a) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$, b) $(a - \sqrt{a^3})^2$, c) $\sqrt[8]{a^6\sqrt[5]{a^7\sqrt{a}}}$, ç) $4a^2\sqrt[7]{a^3} \cdot 2a^5\sqrt[7]{a}$
d) $27a^2\sqrt[6]{a^2-b^2} : (-9a\sqrt[6]{a+b})$ dh) $\sqrt[5]{a^2b^5c^4} : \sqrt{ab^2c^2}$.

15. Kryeji operacionet e shënuara:

a) $\sqrt[3]{\frac{23}{64} + \sqrt{\frac{5}{48^2-32^2}}}$, b) $\sqrt{a^3\sqrt[4]{a^3}} \cdot \sqrt{a^3\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$, për $a > 0$.

16. Racionalizo emëruesin e thyesës:

a) $\frac{6}{\sqrt[4]{18}}$, **b)** $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{3}}$, **c)** $\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ për $x, y > 0$ dhe $x \neq y$

17. Kryeji operacionet e shënuara:

a) $\left(\frac{8a^{-3}}{27b^9}\right)^{-\frac{1}{3}}$, **b)** $\left(3^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}}\right) : \left(\left(2 - 15^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(2 + 15^{\frac{1}{4}}\right)\right)$, **c)** $\left(\left(5^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{8}{7}} - \frac{(2^{-3})^{-2}}{32}\right) \cdot 46^{-1}$

18. Cakto fushën e përkufizimit të shprehjeve:

a) $\frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x}}{(x-3)(x+1)}$, **b)** $\frac{\sqrt{3-2x}-x}{\sqrt{x}}$.

19. Kryeji operacionet e shënuar dhe thjeshtojë shprehjen:

a) $\frac{3-\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} + \frac{3+\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$, **b)** $\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) : \sqrt{1-a^2}$, për $a \in [-1, 1]$

2. FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE NË TREKËNDËSHIN KËNDREJTË

2.1. Funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë

Matja e këndeve

Ekzistojnë mënyra të ndryshme për të shprehur madhësinë e këndeve. Deri tani, si njësi matëse për matjen e këndeve e shfrytëzojmë **shkallën**.

Të përkujtohem se **një shkallë** (1°) përkufizohet si $1/360$ pjesë prej gjysmës së këndit të plotë. Njësi më të vogla janë **një minutë** ($1'$) e cila përkufizohet si pjesë $1/60$ prej një shkalle dhe **një sekondë** ($1''$) e cila përkufizohet si pjesë prej $1/60$ një minute, përkatësisht pjesë prej $1/3600$ një shkalle.

Duke i shfrytëzuar raportet

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ, \quad 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ, \quad 1^\circ = 60' \quad \text{dhe} \quad 1' = 60''$$

mund ta shndërrojmë madhësinë e këndit të dhënë në shkallë, minuta dhe sekonda në formë dhjetore të shkallëve dhe anasjelltas.

Shembulli 1. Shndërrimi këndit $14^\circ 36' 54''$ prej formës dhjetore.

$$14^\circ 36' 54'' = 14^\circ + \left(\frac{36}{60}\right)^\circ + \left(\frac{54}{3600}\right)^\circ = 14^\circ + 0,6^\circ + 0,015^\circ = 14,615^\circ. \quad \blacklozenge$$

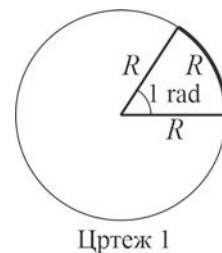
Пример 2. Shndërrimi këndit $72,568^\circ$ në shkallë, minuta dhe sekonda.

slika

Në vazhdimë do të futim njësi të re për matjen e këndeve. Pikërisht, madhësia e këndit qendror të vijës rrethore të harku përkatës e ka gjatësinë të barabartë me gjatësinë e rrezes së asaj vije rrethore, quhet **një radian** dhe shënohet me **1 rad** (fig 1).

Vlejnjë këto rregulla për shndërrimin e një njësie matëse në tjetër:

- Shumëzoji shkallët me $\frac{\pi}{180}$, për të shndërruar në radian.
- Помножи ги радијаните со $\frac{180^\circ}{\pi}$, për të shndërruar në shkallë.



Detyra 1. Shprehi në radian këndet të dhëna në shkallë:

- a) 30° b) $100^\circ 11' 15''$

Zgjidhje. a) $30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52 \text{ rad}$

b) $100^\circ 11' 15'' = 100 \cdot \frac{\pi}{180} + 11 \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} + 15 \cdot \frac{1}{3600} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1,7 \text{ rad}. \quad \blacklozenge$

Detyra 2. Shprehi në shkallë këndet të dhëna në radian:

- a) 0,2 b) $\frac{\pi}{3}$

Решение.

a) $0,2 = 0,2 \cdot \frac{180}{\pi} \approx 11,5^\circ \approx 11^\circ 30'$

b) $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ. \blacklozenge$

Sinusi, kosiusi, tangensi dhe kotangensi prej këndit të ngushtë

Do të përkufizojmë katër funksione, të quajtura funksione trigonometrike të këndit të ngushtë, me ndihmën e trekëndëshit kënddrejtë. Te trekëndëshi këndi pranë kulmit është kënd i drejtë (90°), kurse dy të tjerat pranë kulmeve janë kënde të ngushta (vizatimi 2). Brinja $\overline{AB}$ përballë këndit të drejtë quhet hipotenuzë. Nëse e shënojmë me θ njëri të këndeve të ngushta te trekëndëshi, atëherë brinja BC quhet kateta e përballtë, kurse brinja AC quhet kateta e shtrirë për këndin θ .

Ta shqyrtojmë trekëndëshin kënddrejtë ABC dhe segmentet B_1C_1 , B_2C_2 dhe B_3C_3 të cilat janë normale në katetën AC (vizatimi 3). Ato segmente janë katetë të trekëndëshave kënddrejtë AB_1C_1 , AB_2C_2 dhe AB_3C_3 të cilat kanë kënd të përbashkët α me trekëndëshin kënddrejtë ABC .

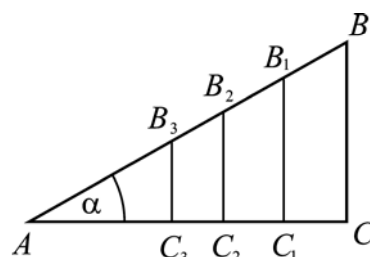
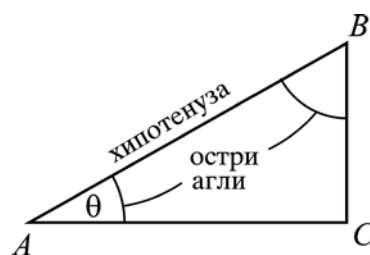
Trekëndëshat kënddrejtë janë të ngjashëm, kurse trekëndëshat përkatës janë proporcional, përkatësisht vlen:

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \text{ dhe } \frac{\overline{AC_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Sipas kësaj, për këndin e dhënë α , raportet ndërmjet gjatësive të brinjëve përkatëse të trekëndëshave kënddrejtë prej vizatimit 3 janë konstante.

Por, nëse ndryshon madhësia e këndit α atëherë do të ndryshon edhe vlera e raporteve. Me fjalë të tjera, raporti prej gjatësive të dy brinjëve te trekëndëshi kënddrejtë varet prej madhësisë së këndit të ngushtë të atij trekëndëshi. Prandaj, ato raporte kanë marrë emra të veçantë



Vizatimi 2

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$	quhet sinus prej këndit dhe shënohet me $\sin \alpha$ përkatësisht $\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$
$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$	quhet kosinus prej këndit dhe shënohet me $\cos \alpha$ përkatësisht $\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$
$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$	quhet tangens prej këndit dhe shënohet me $\tan \alpha$ përkatësisht $\tan \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ dhe
$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	quhet kotangens prej këndit dhe shënohet me $\cot \alpha$ përkatësisht $\cot \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Paraprakisht funksionet e përkufizuara të cilat e japin varësinë ndërmjet gjatësive të brinjëve te trekëndëshit kënddrejtë dhe këndeve të tij të ngushtë quhen **funksione trigonometrike**. Ato mund t'i shprehim edhe në këtë mënyrë:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{gjatësia e katetës së përballtë për } \alpha}{\text{gjatësia e hipotenuzës}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{gjatësia e katetës së shtrirë për } \alpha}{\text{gjatësia e hipotenuzës } c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{gjatësia e katetës së përballtë për } \alpha}{\text{gjatësinë e katetës së shtrirë për } \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{gjatësia e katetës së shtrirë për } \alpha}{\text{gjatësinë e katetës së përballtë për } \alpha}$$

Shembulli 1. Për funksionet trigonometrike prej . ëndit të ngushtë te drejtkëndëshi ABCD te vizatimi 3 kemi

$$\sin \square = \frac{b}{d}, \quad \cos \square = \frac{a}{d}, \quad \operatorname{tg} \square = \frac{b}{a} \quad \text{dhe} \quad \operatorname{ctg} \square = \frac{a}{b}. \quad \blacklozenge$$

Detyra 2. Është dhënë trekëndëshi kënddrejtë katetët e të cilit janë 3 cm dhe 4 cm. Caktoji funksionet trigonometrike (vizatimi 4).

Zgjidhje. Sipas teoremës së Pitagorës mund ta njehsojmë gjatësinë e hipotenuzës. Kemi se vizatimi 5

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad c^2 = 3^2 + 4^2, \quad c^2 = 25, \quad c = 5.$$

Për këndin α gjejmë se

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \quad \text{dhe} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}.$$

Për këndin β gjejmë se

$$\sin \beta = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} \quad \text{dhe} \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{3}{4}. \quad \blacklozenge$$

Funksionet trigonometrike sinus dhe kosinus janë përkufizuar dhe për këndin zero dhe këndin e drejtë me: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ dhe $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Gjithashtu përkufizohet

$$\operatorname{tg} 0 = 0 \quad \text{dhe} \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0,$$

ndërsa $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ dhe $\operatorname{ctg} 0$ nuk janë përkufizuar.

.....

1. Shlyej dhe plotëso këtë tabelë

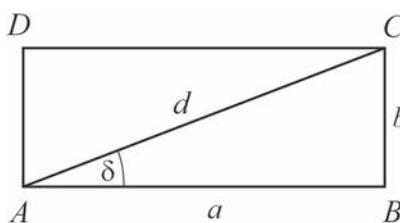
Shkallë	0	30		60		180		360
Radian			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	

2. Cakto funksionet trigonometrike prej këndit α te trekëndëshi kënddrejtë nëse janë dhënë të dy katetët a dhe b .

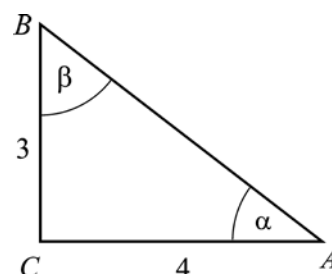
a) $a = 5$, $b = 12$ **b)** $a = 3$, $b = 5,2$.

3. Cakto funksionet trigonometrike të këndit α te trekëndëshi kënddrejtë nëse janë dhënë kateta a dhe hipotenuza c .

a) $a = 8$, $c = 10$ **b)** $a = 9,8$, $c = 12,6$



Цртеж 4



Vizatimi 4

4. Njehso syprinën e trekëndëshit kënddrejtë ABC, me katetët e dhëna $a = 4$ dhe $\sin \alpha = \frac{1}{5}$.
5. Njehso perimetrin e trekëndëshit kënddrejtë ABC, me hipotenuzën e dhënë $c = 5$ dhe $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

2.2. Funkcionet trigonometrike të këndeve komplementare

Dy kënde quhen komplementare nëse shuma e tyre është kënd i drejtë. Për shembull, të dy këndet e trekëndëshi kënddrejtë janë kënde komplementare. Nëse α është njëri të këndeve të ngushta të trekëndëshi kënddrejtë ABC (vizatimi 5), atëherë këndi $\beta = 90^\circ - \alpha$ është këndi i tij komplementar. Nëse α është dhënë në radian, atëherë $\frac{\pi}{2} - \alpha$ është këndi i tij komplementar. Këndi komplementar i këndit 0° është këndi 90° , ndërsa këndi komplementar i këndit prej 90° këndi prej 0° .

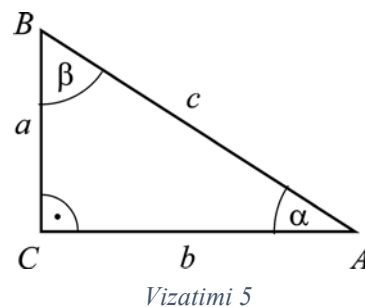
Detyra 1. Cakto këndin komplementar të këndit α nëse:

- a) $\alpha = 37^\circ$ b) $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

Zgjidhje. Kemi se

a) $90^\circ - \alpha = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$

b) $\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi}{10} - \frac{2\pi}{10} = \frac{3\pi}{10}$. ♦



Te vizatimi 6 të dy këndet e ngushta α dhe β të trekëndëshi kënddrejtë ABC janë komplementare. Brinja a është kateta e përballtë për këndin α , kurse kateta e shtrirë për këndin β , ndërsa brinja b është kateta e shtrirë për këndin β . Sipas kësaj, për funksionet trigonometrike të këndeve α dhe β (me kusht $\alpha \neq 0^\circ$ dhe $\beta \neq 0^\circ$), kemi se

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta.$$

prej ku fitojmë se

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos(90^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin(90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$$

Vërejtje. Për këndet komplementare 0° dhe 90° është e saktë se

$$\sin 0^\circ = \cos 90^\circ \text{ и } \cos 0^\circ = \sin 90^\circ, \text{ но } \operatorname{tg} 0^\circ \neq \operatorname{ctg} 90^\circ \text{ и } \operatorname{ctg} 0^\circ \neq \operatorname{tg} 90^\circ.$$

Shembulli 2. Me njehsimin e drejtpërdrejtë fitojmë se

$$\cos 70^\circ = \sin(90^\circ - 70^\circ) = \sin 20^\circ, \quad \sin 10^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \cos 80^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}. \quad \blacklozenge$$

Detyra 3. Thjeshtojë shprehjen:

a) $\sin 40^\circ + 4 \cos 50^\circ$ б) $\frac{3 \operatorname{tg} 20^\circ + 4 \operatorname{ctg} 70^\circ}{5 \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ}$

Zgjidhje. Me zbatimin e formulave për gjetjen e funksioneve trigonometrike të këndeve komplementare gjejmë se

a) $\sin 40^\circ + 4 \cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) + 4 \cos 50^\circ =$
 $= \cos 50^\circ + 4 \cos 50^\circ = 5 \cos 50^\circ$

б) $\frac{3 \operatorname{tg} 20^\circ + 4 \operatorname{ctg} 70^\circ}{5 \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ} = \frac{3 \operatorname{tg} 20^\circ + 4 \operatorname{tg}(90^\circ - 70^\circ)}{5 \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg}(90^\circ - 70^\circ)} =$
 $= \frac{3 \operatorname{tg} 20^\circ + 4 \operatorname{tg} 20^\circ}{5 \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{7 \operatorname{tg} 20^\circ}{4 \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{7}{4}. \blacklozenge$

Detyra 4. Njehso këndin α , nëse SLIKA

Zgjidhje. Me zbatimin e formulave për gjetjen e funksioneve trigonometrike të këndeve komplementare gjejmë se

S L I K A

prej ku vijon se SLIKA

Me njehsimin e drejtpërdrejtë fitohet se $\alpha = 60^\circ$. $\blacklozenge$

Detyra 5. Njehso, me shfrytëzimin e kalkulatorit

a) $\sin 24^\circ + \cos 34^\circ$ б) $\operatorname{tg} 67^\circ - 4 \operatorname{ctg} 77^\circ$

Zgjidhje. a) $\sin 24^\circ + \cos 34^\circ \approx 0,406737 + 0,829038 = 1,235775$.

б) $\operatorname{tg} 67^\circ - 4 \operatorname{ctg} 77^\circ \approx 2,355852 - 4 \cdot 0,230868 = 1,43238$. $\blacklozenge$

Detyra

1. Njehso vlerat e këtyre funksioneve trigonometrike:

a) $\cos 57^\circ$ прекы $\sin 33^\circ$ б) $\sin 77.77^\circ$ прекы $\cos 12,23^\circ$

в) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{18}$ прекы $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$ г) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 1,0785 \right)$ прекы $\operatorname{ctg} 1,0785$.

2. Njehso këndin α , nëse dihet se:

a) $\cos(\alpha + 10^\circ) = \sin 30^\circ$ б) $\operatorname{tg} 35^\circ = \operatorname{ctg}(\alpha - 15^\circ)$.

3. Thjeshtojë shprehjet:

a) $\frac{3 \sin 35^\circ + 5 \cos 55^\circ}{2 \sin 35^\circ}$ б) $\frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ}{\sin^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ}$.

4. Nëse $\alpha + \beta = 90^\circ$, thjeshtojë shprehjet

a) $\sin \alpha + \cos \beta$ б) $\sin \alpha - \cos \beta$ в) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta$.

5. Nëse $\alpha + \beta = 90^\circ$, ($\alpha \neq 0^\circ$ и $\beta \neq 0^\circ$), Njehso vlerën e shprehjes:

a) $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$ б) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta}$ в) $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \beta + \cos \beta}$.

2.3. Vlerat e funksioneve trigonometrike të disa këndeve

Gjatë zgjidhjes së problemeve të ndryshme në gjeometri shfrytëzohen funksionet trigonometrike të këndeve 60° , 30° dhe 45° . Për njehsimin e funksioneve trigonometrike të këtyre këndeve do t'i shfrytëzojmë vetitë e funksioneve trigonometrike të këndeve komplementare.

Ta shqyrtojmë trekëndëshin barakrahas ABC me brinjë 2 cm (vizatimi 8). Prej gjeometrisë dihet se lartësia AD e lëshuar prej kulmit A paraqet njëkohësisht simetrale të këndit pranë kulmit A si edhe simetrale e brinjës së përballtë BC. Sipas kësaj, kemi se

$$\overline{BD} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad \text{dhe}$$

$$\angle DAB = \frac{1}{2} \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

Me zbatimin e teoremës së Pitagorës për trekëndëshin kënddrejtë te vizatimi 9, fitojmë se ABD

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$$

prej ku vijon se

$$\overline{AD}^2 = 2^2 - 1^2 = 3, \quad \text{односно} \quad \overline{AD} = \sqrt{3}$$

Tani mund t'i njehsojmë vlerat e funksioneve trigonometrike për këndet në trekëndëshin ABD

Gjejmë se

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}, \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

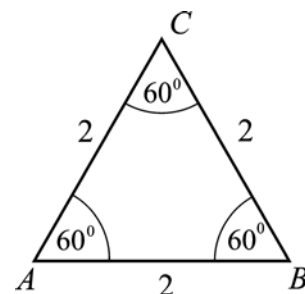
$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

Për t'i njehsuar vlerat e funksioneve trigonometrike prej këndit 45° konstruktojmë trekëndësh barakrahas kënddrejtë me brinjë 1 cm (vizatimi 9). Këndet e tij të ngushta janë nga 45° . Sipas teoremës së Pitagorës hipotenuza $\overline{AB} = \sqrt{2}$.

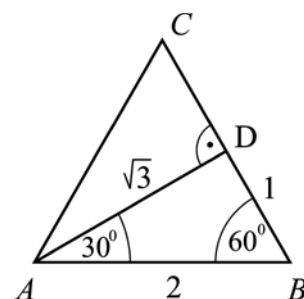
Prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike vijon se

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ \quad \text{dhe} \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 = \operatorname{ctg} 45^\circ$$

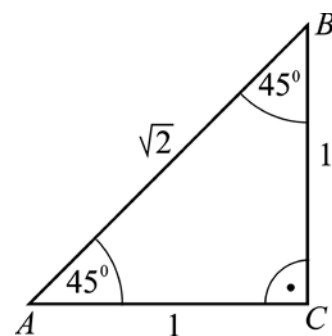
Vlerat e fituara për funksionet trigonometrike mund t'i paraqesim në tabelë:



Vizatimi 7



Vizatimi 8



Vizatimi 9

Shkallë	Radian	sin	cos	tg	ctg
0°	0	0	1	0	/
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	/	0

Detyra 1. Njehso vlerën e shprehjes

$$\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ.$$

Zgjidhje. Kemi se

$$\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \blacklozenge$$

Задача 2. Провери дали е точно равенството

$$4 \sin^2 60^\circ + 4 \cos^2 60^\circ = \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ.$$

Решение. Бидејќи $\operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ$, добиваме дека

$$\operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ = 2 \cdot \operatorname{tg}^2 60^\circ = 2(\sqrt{3})^2 = 6.$$

Од друга страна имаме дека

$$4 \sin^2 60^\circ + 4 \cos^2 60^\circ = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 3 + 1 = 4.$$

Pasi vlera e anës së majtë është e ndryshme prej vlerës së anës së djathtë $4 \neq 6$, përkatësisht përfundojmë se

$$4 \sin^2 60^\circ + 4 \cos^2 60^\circ \neq \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ. \blacklozenge$$

Detyra 3. Gjeje vlerën e shprehjes $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin \alpha}$ за $\alpha = 30^\circ$.

Zgjidhje. Për vlerën e shprehjes gjejmë se

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\cos 2 \cdot 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}. \blacklozenge$$

Të vërejmë se si sillen funksionet trigonometrike prej këndit të ngushtë kur rritet prej 0° deri 90° .

1. Vlera e sinusit prej këndit të ngushtë rritet kur këndi zmadhohet. Me fjalë të tjera, kemi se vlera e funksionit $\sin \alpha$ rritet prej 0 deri 1 kur vlera e argumentit α rritet prej 0° deri 90° .

2. Vlera e kosinusit prej këndit të ngushtë bie kur këndi zmadhohet. Me fjalë të tjera, kemi se vlera e funksionit $\cos \alpha$ bie prej 1 deri 0 kur vlera e argumentit α rritet prej 0° deri 90° .

3. Vlera e tangensit prej këndit të ngushtë rritet kur këndi zmadhohet. Me fjalë të tjera, vlera e funksionit rritet duke filluar prej 0 dhe është numër real jonegativ, kur vlera e argumentit α rritet duke filluar prej 0 dhe është më e vogël se 90° .

4. Vlera e funksionit $\operatorname{ctg} \alpha$ bie deri 0 dhe është numër real jo negativ, kur vlera e argumentit α është më e madhe prej 0° dhe rritet deri 90° .

Detyra

1. Njihso vlerën e shprehjes:

a) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

b) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$

c) $\frac{\sin 30^\circ + 1}{1 + \cos 60^\circ}$

ç) $\frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ}{\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}$

2. Njihso:

a) SLIKA

b) SLIKA

3. Njihso vlerën e shprehjes:

a) $\frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ}$

b) $\frac{\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ}$

c) $\frac{4 \sin^2 45^\circ + 1}{\operatorname{ctg}^2 30^\circ}$

4. Krahajoji vlerat e dhëna të funksioneve trigonometrike:

a) $\sin 35^\circ$ dhe $\sin 67^\circ$

b) $\cos 40^\circ$ dhe $\cos 23^\circ$

c) $\operatorname{tg} 36^\circ$ dhe $\operatorname{tg} 58^\circ$

ç) $\operatorname{ctg} 73^\circ$ dhe $\operatorname{ctg} 39^\circ$

5. Krahajoji vlerat e dhëna të funksioneve trigonometrike:

a) $\sin 45^\circ 17' 20''$ и $\sin 45^\circ 39' 34''$

b) $\cos 40^\circ 55'$ и $\cos 40^\circ 12' 12''$

c) $\operatorname{tg} 56^\circ 23' 55''$ и $\operatorname{tg} 56^\circ 12' 56''$

ç) $\operatorname{ctg} 73^\circ 55' 77''$ и $\operatorname{ctg} 39^\circ 33' 6''$.

2.4. Врска меѓу тригонометриските функции од ист агол

Është e njohur se te trekëndëshi kënddrejtë ABC (vizatimi 10) vlen barazimi

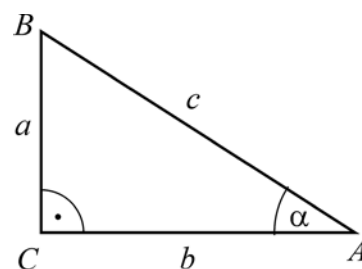
$$a^2 + b^2 = c^2. \text{ Nëse këtë barazim e pjesëtojmë me } c^2 \text{ fitojmë } \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \text{ përkatësisht}$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1. \text{ sipas kësaj, kemi se}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Pasi $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ dhe $\frac{b}{c} = \cos \alpha$, me zëvendësim te barazimi i fundit, kemi

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \quad (1)$$



Vizatimi 10

Shembulli 1. Për shembull, për $\alpha = 30^\circ$, kemi se

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1. \blacklozenge$$

Me shfrytëzimin e barazimit (1) mund ta shprehim funksionin sinus prej çfarëdo këndi të ngushtë nëpërmjet kosinusit prej atij këndi, dhe anasjelltas, përkatësisht

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{dhe} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Detyra 2. Njehso vlerën $\cos \alpha$, nëse $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Zgjidhje. Kemi se

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}. \blacklozenge$$

Detyra 3. Thjeshtoj shprehjen $(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)$.

Zgjidhje. Me këtë detyrë do të tregojmë se si barazimi (1) mund të shfrytëzohet për thjeshtimin e shprehjeve. Pikërisht, kemi se

$$(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha. \blacklozenge$$

Për trekëndëshin kënddrejtë ABC (vizatimi 10) kemi se:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \text{ dhe } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Nëse i pjesëtojmë numëruesin dhe pjesëtuesin e anëve të djathta prej barazimeve të sipërme me c ($c \neq 0$) ke mi se

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \text{ dhe } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}. \quad (2)$$

Nëse shumëzohen $\operatorname{tg} \alpha$ dhe $\operatorname{ctg} \alpha$ fitojmë edhe një barazim

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1} \quad (3)$$

Shembulli 4. Me njehsimin direkt fitohet se

$$\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{(\sqrt{3})^2}{3} = \frac{3}{3} = 1. \blacklozenge$$

Detyra 5. Njehso vlerën $\operatorname{tg} \alpha$, ako $\operatorname{ctg} \alpha = 2$.

Zgjidhje. Prej $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{2}$ fitojmë se $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}. \blacklozenge$

Me ndihmën e lidhjeve themelore ndërmjet funksioneve trigonometrike të këndeve të ngushta të dhëna me barazimet (1), (2) dhe (3), nëse është e njohur vlera e njërit prej tyre, mund të njehen vlerat e tre funksioneve tjera.

Detyra 6. Nëse $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, sa është $\cos \alpha$?

Zgjidhje. Kemi se

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}. \blacklozenge$$

Detyra 7. Nëse $\operatorname{tg} \alpha = 2$, njehso funksionet e tjera trigonometrike të këndit α .

Zgjidhje. Prej barazimit $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ vijon se $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$, përkatësisht

$\sin \alpha = 2 \cos \alpha$. Nga ana tjetër, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, pra kemi se

$$(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 5 \cos^2 \alpha = 1.$$

Sipas kësaj, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$, përkatësisht $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Më tej njihsohet se

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ dhe } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}. \blacklozenge$$

Detyra

1. Njihso funksionet e tjera trigonometrike, nëse është dhënë:

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$ c) $\operatorname{ctg} \alpha = 0,41$.

2. Thjeshtoji shprehjet:

a) $1 - \cos^2 \alpha$ b) $\sin^2 \alpha - 1$ c) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.

3. Vërteto se:

a) $\sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$

b) $\sin^2 \alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + \cos^2 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 2$.

4. Vërteto se për të gjitha këndet e ngushta vlen:

a) $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ b) $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$.

5. Shpehi

a) $\cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ me ndihmën e $\sin \alpha$ b) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ me ndihmën e $\operatorname{ctg} \alpha$.

6. Nëse $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, njihso vlerën e shprehjes $\frac{5 \sin \alpha + \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}$.

2.5. Zgjidhja e trekëndëshit kënddrejtë dhe zbatimi

Le të jenë a , b dhe c brinjët e trekëndëshit kënddrejtë ABC (vizatimi 11), dhe le të jenë α dhe β këndet e tij të ngushta.

Atëherë kemi se

$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ dhe } a^2 + b^2 = c^2.$$

Përveç kësaj, prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike kemi se

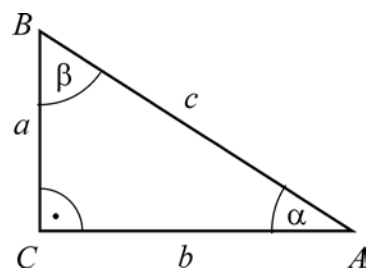
$$\frac{a}{c} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{a}{c} = \cos \beta, \quad \frac{b}{c} = \sin \beta, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta$$

Këto relacione do t'i shfrytëzojmë për njehsimin e elementeve themelore të trekëndëshit kënddrejtë, brinjët dhe këndet e tij, në rastin kur është dhënë:

- një brinjë dhe një kënd,
- dy brinjë.

Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë do të thotë të njihsohen të gjithë elementet e tij themelor në bazë të elementeve të dhëna, prej të cilave të paktën njëri është brinjë.



Vizatimi 11

Detyra 1. Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë me hipotenuzë $c = 93\text{cm}$ dhe këndi $\alpha = 42^\circ 23'$.

Zgjidhje. Duhet t'i njehsojmë të dy katetët a dhe b dhe këndin e ngushtë β .

Me njehsim të drejtpërdrejt për këndin kemi

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 42^\circ 23' = 47^\circ 37'.$$

Për ta njehsuar katetën a , së pari njehsojmë $\sin 42,3833^\circ = 0,67409$, por pastaj prej $a = c \cdot \sin \alpha = 93 \cdot 0,67409 \approx 63$ gjejmë se $a \approx 63\text{cm}$. Katetën b mund ta njehsojmë me ndihmën e hipotenuzës dhe kosinusit prej këndit α ose me zbatimin e teoremës së Pitagorës.

Mënyra I. $b = c \cdot \cos \alpha = 93 \cdot \cos 42,3833^\circ = 93 \cdot 0,73865$, përkatësisht $b \approx 69\text{cm}$.

Mënyra II $b = \sqrt{93^2 - 63^2} \approx 69\text{cm}$. ♦

Detyra 2. Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë katetët e të cilit janë $a = 21\text{cm}$ dhe $b = 15\text{cm}$.

Zgjidhje. Duhet të njehsohet hipotenuza dhe të dy këndet e ngushta.

Hipotenuzën e njehsojmë me zbatimin e teoremës së Pitagorës

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{21^2 + 15^2} = \sqrt{610} \approx 25\text{cm}.$$

Këndin α do ta caktojmë me ndihmën e funksionit tangens. Prej kushtit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{21}{15} = 1,4 \quad \text{Njehsojmë se } \alpha \approx 54^\circ 28'. \text{ Për këndin } \beta \text{ njehsojmë se}$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 54^\circ 28', \text{ përkatësisht } \beta \approx 35^\circ 32'. \quad \blacklozenge$$

Detyra 3. Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë me katetët $b = 53\text{cm}$ dhe këndi $\beta = 64^\circ$.

Zgjidhje. Sipas kushteve të detyra duhet ta njehsojmë këndin tjetër të ngushtë, katetën dhe hipotenuzën. Njehsojmë $\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$

dhe $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = 53 \cdot \operatorname{tg} 26^\circ = 53 \cdot 0,48773 \approx 26$, përkatësisht $a \approx 26\text{cm}$. Ose $b = c \sin \beta$ gjejmë

$$\text{se } c = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{53}{\sin 64^\circ} \approx \frac{53}{0,89879}, \text{ përkatësisht } c \approx 59\text{cm}. \quad \blacklozenge$$

Detyra 4. Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë me katetën $a = 37\text{cm}$ dhe hipotenuzën $c = 48\text{cm}$.

Zgjidhje. Duhet të njehsohen këndet α dhe β dhe kateta b .

$$\text{Prej kushtit } \sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{37}{48} = 0,77083 \text{ kemi se } \alpha \approx 50,42878^\circ, \text{ përkatësisht}$$

$$\alpha \approx 50^\circ 25' 44'' \text{ и } \beta = 90^\circ - \alpha \approx 39^\circ 34' 16''.$$

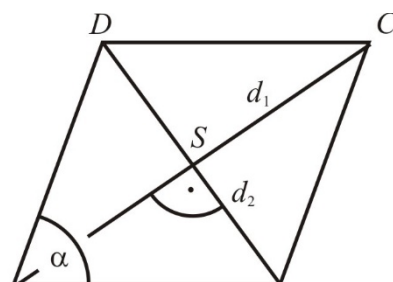
$$\text{Prej } b = c \cdot \sin \beta = 48 \cdot \sin 39^\circ 34' 16'' \approx 48 \cdot 0,63704 \approx 31 \text{ gjejmë se } b \approx 31\text{cm}. \quad \blacklozenge$$

Zgjidhja e trekëndëshit kënddrejtë gjen zbatim të madh në zgjidhjen e detyrave nga fusha e planimetrisë, por edhe prej jetës së përditshme. Zbatimin e këtillë do ta ilustrojmë me disa shembuj.

Detyra 5. Njehso brinjën e rombit nëse është dhënë këndi i tij i ngushtë $\alpha = 66^\circ$ dhe një diagonale.

$$d_1 = 34\text{cm}.$$

Zgjidhje. Le të jenë dhënë këndi α te kulmi A dhe diagonalja d_1 e tërhequr prej atij kulmi (vizatimi 12).



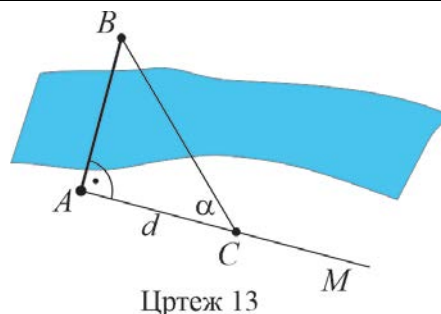
Vizatimi 12

Prej trekëndëshit kënddrejtë ABS kemi se

$$\frac{d_1}{2} = a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \text{prej ku gjejmë se}$$

$17 = a \cdot \cos 33^\circ$. Me njehsimin e drejtpërdrejt fitojmë se

$$a = \frac{17}{\cos 33^\circ} = \frac{17}{0,83863} \approx 203 \text{ cm.} \blacklozenge$$



Detyra 6. Njehso largësinë ndërmjet pikave A dhe B të cilat gjenden në anë të ndryshme të një lumi (figura. 13).

Zgjidhje. Te pika A konstruktojmë kënd të drejtë BAM. Në fund të atij këndi marrim pikën C dhe e masim këndin ACB. Madhësia e atij këndi le të jetë $\alpha = 49^\circ$. E masim largësinë ndërmjet pikave A dhe C dhe ajo le të jetë $d = 28 \text{ m}$. Atëherë kemi se

$$\overline{AB} = d \cdot \operatorname{tg} \alpha = 28 \cdot \operatorname{tg} 49^\circ \approx 28 \cdot 1,15037 \approx 32,$$

односно $\overline{AB} \approx 32 \text{ m.} \blacklozenge$

Detyra 7. Druri e ka hijen e gjatë 4,8m kur rrezja e diellit formon kënd prej $38^\circ 20'$ cme sipërfaqen e Tokës. Cakko lartësinë e drurit.

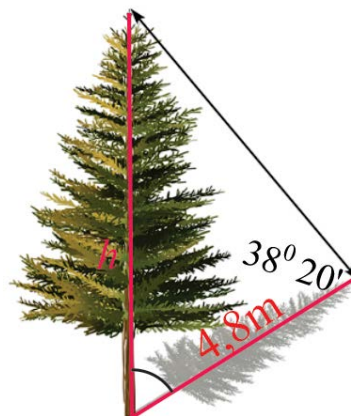
Zgjidhje. Do të konstruktojmë trekëndësh kënddrejtë me kënd të drejtë ndërmjet drurit dhe sipërfaqes së Tokës, prej ku lehtë fitohet se lartësia e drurit

$$h = 4,8 \cdot \operatorname{tg} 38^\circ 20' \approx 4,8 \cdot 0,7906 \approx 3,79 \text{ m (Vizatimi 14).}$$

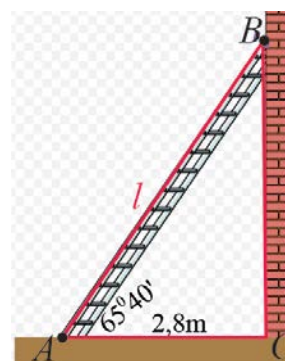
Detyra 8. Shkallët e zjarrfikësve gjenden në largësi 2,8m prej murit. Cakto gjatësinë e shkallëve nëse këndi ndërmjet shkallëve dhe dyshemesë është $65^\circ 40'$.

Zgjidhje. Do të konstruktojmë trekëndësh kënddrejtë me këndin e drejtë ndërmjet murit dhe dyshemesë. Atëherë gjatësia e shkallëve është

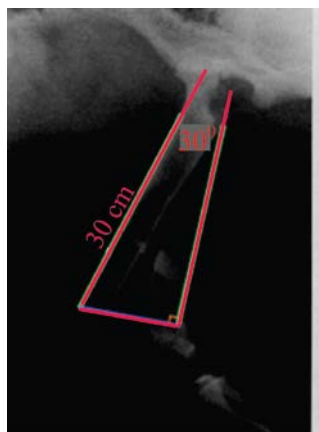
$$l = \frac{2,8}{\cos 65^\circ 40'} \approx \frac{2,8}{0,69879} \approx 4 \text{ m (Vizatim 15).}$$



Цртеж 14



Цртеж 15



Цртеж 17

Detyra 9. Te vizatimi 16 është paraqitur amplicimi i injeksionit në ind 2cm, amplicirimi është nën këndin e drejtë prej 45° , atëherë cila thellësi duhet të gjendet gjilpëra?



Цртеж 16

Zgjidhje. Sipas vizatimit

$$\sin 45^\circ = \frac{x}{2}, \quad \text{prej ku fitohet se} \quad x = 2 \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2} \text{ cm.}$$

Detyra 10. Te incizimi i rentgenit te vizatimi 17 vërehet thyerja e ashtit të qenit. Gjatësia e ashtit të qenit është 30cm. Sa duhet të jetë gjatësia e plakës sipas të dhënave të incizimit?

Zgjidhje. Sipas incizimit fitohet se $\cos 30^\circ = \frac{x}{30}$, prej ku vijon se
 $x = 30 \cdot \cos 30^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \approx 25,98 \text{ cm}$. Kjo do të thotë se pllaka duhet të ketë gjatësi prej 25,98 cm.

Detyra

Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë ABC nëse:

1. $\alpha = 36,2^\circ$, $c = 68 \text{ cm}$. 2. $\beta = 15,8^\circ$, $c = 12,2 \text{ cm}$.
3. $\beta = 65,4^\circ$, $a = 2,35 \text{ cm}$. 4. $\alpha = 82^\circ$, $b = 246 \text{ cm}$.
5. $a = 230 \text{ cm}$, $c = 320 \text{ cm}$. 6. $a = 52,5 \text{ cm}$, $b = 28 \text{ cm}$.
7. Rrezja e vijës rrethore është 13 cm, gjatësia e kordës AB është 10 cm. Njehso madhësinë e këndit AOB
8. Lartësia e trapezit barakrahas është 6 cm, kurse bazat kanë gjatësi 4 cm dhe 20 cm, përkatësisht. Njehso këndet e trapezit.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Shndërroi në shkallë, minuta dhe sekonda këndet:
 - a) $34,41^\circ$ b) $18,27^\circ$ c) $23,67^\circ$.
2. Shndërroi në dhjetore shkallët e këndeve:
 - a) $36^\circ 25' 36''$ b) $45^\circ 11' 19''$ c) $73^\circ 52' 25''$.
3. Shndërroi në radian këndet: a) 25° b) $62^\circ 15'$ c) $35^\circ 5' 38''$.
4. Shndërroi në shkallë këndet të dhëna në radian: a) $\frac{7\pi}{12}$ b) 1,27 c) 0,45.
5. Njehso vlerën e shprehjes:
 - a) $\frac{\sin 30^\circ - \cos 30^\circ}{5 \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}$ b) $\frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{2 \cos^2 30^\circ - 1}$ c) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{1 - \cos \alpha}$, za $\alpha \neq 0$.
6. Gjej këndin α për të cilin vlen:
 - a) $\sin \alpha = \cos 65^\circ$ b) $\cos \alpha = \sin 42^\circ 50''$
 - c) $\sin(\alpha + 20^\circ) = \sin 50^\circ$ c) $\operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ) = \operatorname{ctg}(\alpha + 25^\circ)$.
7. Пресметај ја вредноста на останатите тригонометриски функции, ако е дадено:
 - a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$ c) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{25}$
8. Njehso vlerën e shprehjes:
 - a) $4 \operatorname{tg} \alpha + 5 \cos \alpha$, Nëse $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) $\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$, Nëse $\operatorname{tg} \alpha = 2$.
9. Zgjidhe trekëndëshin kënddrejtë ABC, nëse janë dhënë:
 - a) $\alpha = 36^\circ 2'$, $c = 68$ b) $\beta = 64^\circ 20'$, $a = 450$
 - c) $\beta = 85^\circ 10'$, $b = 0,62$ c) $a = 230$, $c = 320$
10. Te trapezi barakrahas, janë të njohura baza a, krahu c dhe këndi α pranë bazës. Njehso bazën tjetër dhe lartësinë e trapezit.
11. Shkallët e zjarrfikësve gjenden në largësi 12 cm prej murit. Cakto gjatësinë e shkallëve nëse këndi ndërmjet shkallëve dhe dyshemesë është $65^\circ 40'$.

3. NUMRAT KOMPLEKS

3.1. Koncepti për numrin kompleks

Barazimi $x^2 = -1$ nuk ka zgjidhje, pasi nuk ekziston numër real katrori i të cilit është numër negativ. Për ta zgjidhur këtë barazim $x^2 = -1$ bashkësinë e numrave realë do ta zgjerojmë deri te bashkësia e re e numrave, të cilën barazimi i dhënë ka zgjidhje. Për këtë qëllim, futim simbol të ri i , i cili sipas përkufizimit do të ketë vetinë $i^2 = -1$. Kështu, fitojmë bashkësi të re e cila i përmban numra realë dhe simbolin i dhe në të cilën barazimi $x^2 = -1$ ka zgjidhje.

Përkufizojmë elementet e bashkësisë së re të jenë të gjitha shënimet formale të formës $a + bi$, ku a dhe b janë numra realë, të quajtur **numra kompleks**. Kështu, bashkësia e përkufizuar quhet **bashkësia e numrave kompleks** dhe shënohet me $\mathbb{C}$. Numri i ri i për të cilin $i^2 = -1$ quhet **njështet imagjinare**. Sipas kësaj,

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Çdo numër real a do ta barazojmë me numrin kompleks $a + 0i$, duke venduar $a = a + 0i$. Në këtë mënyrë mund të llogarisim se bashkësia e numrave realë është nënbashkësi prej bashkësisë së numrave kompleks $\mathbb{C}$.

Shënimi $z = a + bi$ quhet **formë algjebrik** ose **standarde** e numrave kompleks. Numri a quhet **pjesa reale**, kurse numri b quhet **pjesa imagjinare**. Poashtu i shfrytëzojmë shënimet $a = \operatorname{Re}(z)$ dhe $b = \operatorname{Im}(z)$. Me marrëveshje $a + (-b)i = a - ib$.

Detyra 1. Cakto pjesën reale dhe imagjinare të numrit kompleks z nëse:

a) $z = 4 + 7i$ **b)** $z = -\frac{1}{3} + \sqrt{2}i$ **c)** $z = -4$ **d)** $z = 0$

Zgjidhje. a) $\operatorname{Re}(z) = 4$ dhe $\operatorname{Im}(z) = 7$ **b)** $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{3}$ dhe $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{2}$

c) $\operatorname{Re}(z) = -4$ dhe $\operatorname{Im}(z) = 0$ **d)** $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$. ♦

Numri kompleks z ashtu që $\operatorname{Re}(z) = 0$ lexohet **numri i pastër imagjinar**. Sikurse theksuam, numri kompleks z ashtu që $\operatorname{Im}(z) = 0$ është numër real.

Shembulli 2. Numrat kompleks $z = -\sqrt{2}$, $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{2}i$ dhe $z = 0$ janë numra realë, kurse numrat kompleks $z = \sqrt{3}i$, $z = -i$ dhe $z = (1 + \sqrt{2})i$ janë numra të pastër imagjinarë. ♦

Dy numra kompleks janë të **barabartë** nëse dhe vetëm nëse janë të barabartë pjesët reale dhe imagjinare, përkatësisht. Më saktë, nëse $z_1 = a_1 + b_1i$ dhe $z_2 = a_2 + b_2i$ janë numra kompleks, atëherë $z_1 = z_2$, nëse edhe vetëm nëse $a_1 = a_2$ dhe $b_1 = b_2$. Sipas kësaj, një numër kompleks z është plotësisht i caktuar nëse janë të njohur pjesa e tij reale $\operatorname{Re}(z)$ dhe pjesa e tij imagjinare $\operatorname{Im}(z)$. Atëherë numrin kompleks mund ta shkruajmë në formën

$$z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$$

Detyra 3. Cakto numrin kompleks z nëse:

a) $\operatorname{Re}(z) = -2$ dhe $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{2}$ **b)** $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{3}$ dhe $\operatorname{Im}(z) = 3 - \sqrt{3}$

Zgjidhje. a) $\operatorname{Re}(z) = -2 + \sqrt{2}i$ **b)** $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} + (3 - \sqrt{3})i$. ♦

Detyra 4. Për cilat numra realë x dhe y vlen barazimi $2x + (y + 1)i = 4y + 3i$.

Zgjidhje. Vendojmë $z_1 = 2x + (y + 1)i$ dhe $z_2 = 4y + 3i$. Atëherë kemi se $\operatorname{Re}(z_1) = 2x$, $\operatorname{Im}(z_1) = y + 1$, $\operatorname{Re}(z_2) = 4y$ dhe $\operatorname{Im}(z_2) = 3$. Prej përkufizimit për barazim të numrave kompleks drejtpërdrejt fitojmë se $z_1 = z_2$ përkatësisht $2x + (y + 1)i = 4y + 3i$ nëse dhe vetëm nëse $2x = 4y$ dhe $y + 1 = 3$ përkatësisht $x = 4$ dhe $y = 2$. ♦

Dy numra kompleks të cilët ndryshojnë vetëm te shenja e pjesës imagjinare quhen **numra kompleks të konjuguar**. Nëse $z = a + bi$ është numër kompleks, atëherë numër kompleks i tij i konjuguar, i shënuar me $\bar{z}$, është numri $\bar{z} = a - ib$.

Detyra 5. Cakto numrin kompleks të konjuguar të numrit z nëse:

a) $z = 2 + 3i$ **b)** $z = -\frac{1}{2} - 5i$ **c)** $z = 3 + i$ **ç)** $z = -\frac{1}{2}i$

Zgjidhje. a) $\bar{z} = 2 - 3i$ **b)** $\bar{z} = -\frac{1}{2} + 5i$ **c)** $\bar{z} = 3 - i$ **ç)** $\bar{z} = \frac{1}{2}i$. ♦

Nëse z është numër kompleks atëherë $\overline{\bar{z}} = z$. Me të vërtet nëse $z = a + bi$, atëherë $\operatorname{Im}(z) = b$, prej ku vijon se $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -b$. Më tej, prej $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -(-b) = b$, vijon se $\overline{\bar{z}} = z$.

Detyra 6. Cakto $\overline{\bar{z}}$ nëse $z = 2 + 3i$.

Zgjidhje. $\overline{\bar{z}} = z = 2 + 3i$.

Detyra

1. Cakto pjesën reale dhe imagjinare të numrit kompleks z , nëse:

a) $z = 4 + 2i$ **b)** $z = -3 + 4i$ **c)** $z = -4 + \frac{1}{2}i$ **ç)** $z = 1 + \sqrt{2} + i$

2. Gjeje numrin kompleks z nëse:

a) $\operatorname{Re}(z) = 3$ dhe $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$ **b)** $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{4}$ dhe $\operatorname{Im}(z) = 2 - \sqrt{2}$

3. Për cilat numra realë x dhe y janë të barabartë numrat kompleks:

a) $5 - 8i$ dhe $x + yi$ **b)** $2x + 8i$ dhe $10 + yi$

4. Cakto numrin kompleks të konjuguar $\bar{z}$ nëse:

a) $z = 7 + 5i$ **b)** $z = -\frac{1}{4} - 6i$ **c)** $z = -\frac{1}{3}i$ **ç)** $z = 5$

5. Njehso $\operatorname{Re}(4 - 7i) \cdot \operatorname{Im}(12 - 3i) + \operatorname{Im}(5 + 9i)$.

3.2. Mbledhja dhe zbritja e numrave kompleks

Mbledhja e numrave kompleks

Le të jenë $z_1 = a_1 + b_1i$ dhe $z_2 = a_2 + b_2i$ çfarëdo numra kompleks. Me barazimin
 $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
 është përkufizuar **operacioni i mbledhjes në bashkësinë e numrave kompleks**. Numri kompleks

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

quhet **shuma** e numrave të dhënë kompleks, të quajtur **mbledhës**.

Prandaj, shuma e dy numrave kompleks është numër kompleks ku pjesa reale, përkatësisht pjesa imagjinare është shumë e pjesëve reale, përkatësisht pjesës imagjinare të mbledhësve, përkatësisht.

Detyra 1. Cakto shumën e numrave kompleks z_1 dhe z_2 nëse:

a) $z_1 = 3 + 6i$ dhe $z_2 = 4 + 2i$ **b)** $z_1 = 2 - i$ dhe $z_2 = 1 + \frac{1}{2}i$.

Zgjidhje. a) $z_1 + z_2 = (3 + 6i) + (4 + 2i) = (3 + 4) + (6 + 2)i = 7 + 8i$.

b) $z_1 + z_2 = (2 - i) + \left(-1 + \frac{1}{2}i\right) = (2 - 1) + \left(-1 + \frac{1}{2}\right)i = 1 - \frac{1}{2}i$. ♦

Operacioni mbledhje e numrave kompleks i ka këto veti:

a) Për çdo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (komutative)

b) Për çdo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (asociative)

c) Për çdo $z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = 0 + z = 0$ (0 është zero)

ç) Për çdo $z_1 \in \mathbb{C}$, ekziston $z_2 \in \mathbb{C}$, ashtu që $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0$

(çdo numër kompleks ka numrin e tij të kundërt kompleks)

Çdo numër kompleks z ka numrin e vetëm të kundërt, të cilin do ta shënojmë me $-z$. Atëherë themi se z dhe $-z$ janë **të kundërt** njëri në tjetrin.

Detyra 2. Gjeje numrin kompleks të kundërt të numrit $z = 2 - 3i$.

Zgjidhje. $-z = -2 + 3i$. ♦

Për shkak të vetisë asociative dhe komutative operacioni i mbledhjes së numrave kompleks, mund të flasim për shumën përfundimisht të shumë numra kompleks, që nuk varet prej grupimit dhe renditjes të mbledhjes.

Detyra 3. Gjej shumën e numrave kompleks

$$z_1 = 3 + 4i, z_2 = -2 + i, z_3 = 1 - i, z_4 = -2i \text{ dhe } z_5 = 6$$

Zgjidhje. $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = (3 + 4i) + (-2 + i) + (1 - i) + (-2i) + 6 =$
 $= (3 - 2 + 1 + 0 + 6) + (4 + 1 - 1 - 2 + 0)i = 8 - 2i$. ♦

Zbritja e numrave kompleks

Le të jenë $z_1 = a_1 + b_1i$ dhe $z_2 = a_2 + b_2i$ çfarëdo numra kompleks. Me barazimin
 $(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

është përkufizuar **operacioni i zbritjes në bashkësinë e numrave kompleks**. Numri kompleks

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

quhet **ndryshimi** i numrit kompleks z_1 me numrin kompleks z_2 , ku z_1 quhet **i zbritshmi**, kurse z_2 **zbritësi**.

Ndryshimi i një numri kompleks me tjetër është numri kompleks ku pjesa reale, përkatësisht pjesa imagjinare është ndryshimi i pjesëve reale, përkatësisht pjesëve imagjinare të zbritshmit me zbritësin, përkatësisht.

Detyra 4. Gjej ndryshimin $z_1 - z_2$ nëse:

a) $z_1 = 3 + 6i$ dhe $z_2 = 4 + 2i$ **b)** $z_1 = 2 + 4i$ dhe $z_2 = 1 + 2i$

c) $z_1 = 3 - 6i$ dhe $z_2 = -4 + 7i$

Zgjidhje. a) $z_1 - z_2 = (3 + 6i) - (4 + 2i) = (3 - 4) + (6 - 2)i = -1 + 4i$

b) $z_1 - z_2 = (2 + 4i) - (1 - 2i) = (2 - 1) + (4 - (-2))i = 1 + 6i$

c) $z_1 - z_2 = (3 - 6i) - (4 + 7i) = (3 - 4) + (-6 - 7)i = -1 - 13i$. ♦

Le të jenë $z_1 = a_1 + b_1i$ dhe çfarëdo numra kompleks. Prej barazimit

$$(a_1 + b_1i) + (-(a_2 + b_2i)) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

mund të përfundojmë se ndryshimi i numrit kompleks z_1 me numrin kompleks z_2 është shuma e numrit kompleks z_1 me numrin $-z_2$ përkatësisht me numrin e kundërt të z_2 .

Detyra 5. Prej numrit kompleks $z_1 = -10 + 7i$ zbritë numrin kompleks $z_2 = -12 + 5i$.

Zgjidhje. Sipas përkufizimit numrat kompleks fitojmë

$$z_1 - z_2 = (-10 + 7i) - (-12 + 5i) = (-10 - (-12)) + (7 - 5)i = 2 + 2i.$$

Nga ana tjetër, nëse numrin kompleks $z_1 = -10 + 7i$ e mbledhim me numrin e kundërt të numrit kompleks $z_2 = -12 + 5i$ përkatësisht me $-z_2 = -(-12 + 5i)$ kemi

$$\begin{aligned} z_1 + (-z_2) &= (-10 + 7i) + (-(-12 + 5i)) = (-10 + 7i) + (12 - 5i) \\ &= (-10 + 12) + i(7 - 5) = 2 + 2i \end{aligned}$$

Domethënë edhe në të dy rastet e fitojmë rezultatin e njëjtë. ♦

Kjo qasje nga operacioni zbritje të numrave kompleks e lehtëson operimin me numrat kompleks, pasi operacioni mbledhje është komutative dhe asociative.

Detyra 6. Gjeje numrin kompleks $z = z_1 - z_2 + z_3 - z_4$, nëse është dhënë se $z_1 = -11 + 3i$, $z_2 = 7 + i$, $z_3 = 2 - i$ dhe $z_4 = -2i$.

$$\begin{aligned} \text{Zgjidhje. } z &= z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = (-11 + 3i) - (7 + i) + (2 - i) - 2i = \\ &= (-11 + 3i) + (-(7 + i)) + (2 - i) + (-2i) = \\ &= (-11 + 3i) + (-7 - i) + (2 - i) + 2i = \\ &= (-11 - 7 + 2) + (3 - 1 - 1 + 2)i = -16 + 3i. \end{aligned}$$
 ♦

Numrat kompleks të konjuguar kanë disa veti interesante në lidhje me operacionet mbledhje dhe zbritje të numrave kompleks.

Detyra 7. Gjej shumën dhe ndryshimin e numrit kompleks $z = 1 + 2i$ me numrin kompleks të tij të konjuguar.

Zgjidhje. Numri kompleks $\bar{z} = 1 - 2i$ është numër kompleks i konjuguar të numrit të dhënë. Atëherë

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (1 + 2i) + (1 - 2i) = (1 + 1) + (2 - 2)i = 2 \text{ dhe} \\ z - \bar{z} &= (1 + 2i) - (1 - 2i) = (1 - 1) + i(2 - (-2)) = 4i. \end{aligned}$$
 ♦

Prej detyrës 7 vërejmë se për çdo numër kompleks z vlen

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2 \operatorname{Re}(z) \text{ dhe}$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2 \operatorname{Im}(z)i.$$

Detyra 8. Le të jenë $z_1 = 3 - i$ dhe $z_2 = -2 + 3i$ dy numra kompleks. Gjeji numrat kompleks $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \overline{z_1 + z_2}, \overline{z_1 - z_2}$ dhe $\overline{z_1 - z_2}$

Zgjidhje. $\bar{z}_1 = 3 + i, \bar{z}_2 = -2 - 3i,$

$$\overline{z_1 + z_2} = (3 + i) + (-2 - 3i) = 1 - 2i, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{(3 - i) + (-2 + 3i)} = \overline{1 + 2i} = 1 - 2i,$$

$$\overline{z_1 - z_2} = (3 + i) - (-2 - 3i) = 5 + 4i,$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{(3 - i) - (-2 + 3i)} = \overline{5 - 4i} = 5 + 4i. \blacklozenge$$

Në rastin e përgjithshëm, për çdo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, vlejshëm barazimet

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \text{ dhe } \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$$

Detyra

1. Gjej shumën e numrave kompleks z_1 dhe z_2 . Nëse

a) $z_1 = 3 + 2i$ dhe $z_2 = 4 + 7i$

b) $z_1 = -40 - 20i$ dhe $z_2 = -13i$

2. Numrat kompleks $z_1 = \frac{1}{2} - 16i$ dhe $z_2 = -\frac{1}{2} + 16i$ a janë të kundërt njëri në tjetrin?

3. Njehso ndryshimin e numrit kompleks z_1 me numrin kompleks z_2 , nëse

a) $z_1 = 18 - 50i$ dhe $z_2 = -9 - 20i$

b) $z_1 = 74 - 12i$ dhe $z_2 = 15i$

4. Gjej pjesën reale dhe imagjinare të numrit kompleks z nëse:

a) $z = (-4 + i) - (16 - 2i) + (29 - i)$

b) $z = 17i + (-11 - 8i) - 14i + 6$

5. Le të jenë $z_1 = 2 - i$ dhe $z_2 = -1 + 2i$ dy numra kompleks. Gjeji numrat kompleks $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \overline{z_1 + z_2}, \overline{z_1 - z_2}$ dhe $\overline{z_1 - z_2}$.

3.3. Shumëzimi dhe pjesëtimi i numrave kompleks

Shumëzimi i numrave kompleks

Le të jenë $z_1 = a_1 + b_1i$ dhe $z_2 = a_2 + b_2i$ çfarëdo numra kompleks. Me barazimin

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$$

është përkufizuar **operacioni i shumëzimit në bashkësinë e numrave kompleks**. Numri kompleks

$$z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$$

quhet **prodhim** i numrave të dhënë kompleks, të quajtur **shumëzues**.

Në mënyrë intuitive, me numrat kompleks të dhënë në formën algjebrike operojmë në mënyrë të ngjashme sikurse me polinomet reale, përkatësisht numrat kompleks i shumëzojmë sikurse polinomet sipas njështes imagjinare i .

Detyra 1. Gjej prodhimin e numrave kompleks z_1 dhe z_2 , nëse:

a) $z_1 = 3 + 6i$ dhe $z_2 = 4 + 2i$; **b)** $z_1 = 2 + 4i$ dhe $z_2 = 1 - 2i$.

Zgjidhje. a) $z_1 z_2 = (3 + 6i)(4 + 2i) = (3 \cdot 4 - 6 \cdot 2) + (3 \cdot 2 + 6 \cdot 4)i =$
 $= 0 + 30i = 30i$

b) $z_1 z_2 = (2 + 4i)(1 - 2i) = (2 \cdot 1 - 4 \cdot (-2)) + (2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1)i = 10. \blacklozenge$

Operacioni i shumëzimit të numrave kompleks i ka këto veti:

a) Për çdo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (komutativ)

b) Për çdo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (asociativ)

c) Për çdo $z \in \mathbb{C}$, $1z = z1 = z$ (1 është njëshe)

ç) Për çdo $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$ ekziston $z_2 \in \mathbb{C}$, ashtu që $z_1 z_2 = z_2 z_1 = 1$.

(çdo numër kompleks, i ndryshueshëm prej 0, ka numër invers)

d) Për çdo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$, dhe $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (shumëzimi është distributiv në lidhje me mbledhjen)

Duke ditur të shumëzojmë dy numra kompleks, mund të shumëzojmë përfundimisht shumë numra kompleks. Për shkak të vetisë komutative dhe asociative të operacionit të shumëzimit të numrave kompleks prodhimi përfundimisht i numrave kompleks nuk varet prej grupimit të shumëzuesve dhe prej rendit të shumëzimit.

Pjesëtimi i numrave kompleks

Le të jenë $z_1 = a_1 + b_1 i$ dhe $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z_2 \neq 0$ çfarëdo numra kompleks. Me barazimin

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

është përkufizuar **operacioni i pjesëtimit në bashkësinë e numrave kompleks**.

Numri kompleks

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

quhet **herës** i numrit kompleks z_1 me numrin kompleks z_2 , ku z_1 quhet **i pjesëtueshmi**, kurse z_2 **pjesëtues**.

Të vërejmë se $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, pasi $z_2 \neq 0$.

Detyra 3. Gjej herësin e numrit kompleks $z_1 = 5 + i$ me numrin kompleks $z_2 = 3 - 8i$.

Zgjidhje: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + i}{3 - 8i} = \frac{5 \cdot 3 + 1 \cdot (-8)}{3^2 + (-8)^2} + i \frac{1 \cdot 3 - 5 \cdot (-8)}{3^2 + (-8)^2} = \frac{7}{73} + \frac{43}{73} i. \blacklozenge$

Le të jenë $z_1 = a_1 + b_1 i$ dhe $z_2 = a_2 + b_2 i$ çfarëdo numra kompleks. Prej barazimit

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \text{ dhe } z_1 \frac{1}{z_2} = (a_1 + b_1 i) \frac{1}{a_2 + b_2 i} = \\ &= (a_1 + b_1 i) \left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \right) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i, \end{aligned}$$

mund të përfundojmë se $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$,

përkatësisht herësi i numrit kompleks z_1 me numrin kompleks $z_2 \neq 0$ është prodhimi i numrit z_1 me numrin $\frac{1}{z_2}$, përkatësisht me numrin reciprok të z_2 .

Për gjetjen efektive të herësit të dy numrave kompleks shfrytëzohet metoda e zgjerimit të herësit me numrin kompleks të konjuguar te pjesëtuesi.

Shembulli 1. Ta zbatojmë metodën e zgjerimit të herësit me numrin kompleks të konjuguar të pjesëtuesit për përcaktimin e herësit të dhënë te shembulli paraprak. Prej

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+i}{3-8i} = \frac{(5+i)(3+8i)}{(3-8i)(3+8i)} = \frac{15+3i+40i+8i^2}{9-64i^2} = \frac{7}{73} + \frac{43}{73}i,$$

mund të përfundojmë se edhe në të dy rastet e fitojmë rezultatin e njëjtë. ♦

Sipas kësaj, operacionet e përkufizuara shumëzim dhe pjesëtim, për fuqitë pozitive të njësjes imagjinare kemi se

$$\begin{aligned} i^1 &= i, & i^5 &= i^4 i = i, \\ i^2 &= ii = (0+i)(0+i) = -1, & i^6 &= i^5 i = -1, \\ i^3 &= i^2 i = (-1)i = -i, & i^7 &= i^6 i = (-1)i = -i, \\ i^4 &= i^3 i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1, & i^8 &= i^7 i = (-i)i = -i^2 = 1. \end{aligned}$$

Për fuqitë negative të njësjes imagjinare kemi se

$$\begin{aligned} i^{-1} &= \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i, & i^{-2} &= \frac{1}{i^2} = -1, & i^{-3} &= \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i, & i^{-4} &= \frac{1}{i^4} = 1. \\ i^{-5} &= \frac{1}{i^5} = -i, & i^{-6} &= \frac{1}{i^6} = -1, & i^{-7} &= \frac{1}{i^7} = i, & i^{-8} &= \frac{1}{i^8} = 1. \end{aligned}$$

Sipas përkufizimit kemi se $i^0 = 1$.

Nëse e vazhdojmë mënyrën e sipërme, mund të përfundojmë se për fuqitë e njësjes imagjinare vlejnë barazimet

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Duke shfrytëzuar operacionin e shumëzimit të numrave kompleks, mund të kryejmë fuqizim të numrave kompleks, në mënyrë të ngjashme sikurse te polinomet.

Shembulli 2. a) Nëse $x, y \in \mathbb{R}$, atëherë $(x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$

b) $(3 + 4i)^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i$

c) $(2 + 3i)^3 = 2^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3i + 3 \cdot 2 \cdot 9i^2 + (3i)^3 = 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i$ ♦

Detyra 5. Le të jenë $z_1 = 4 - i$ dhe $z_2 = -1 + 3i$ dy numra kompleks. Gjeji numrat kompleks $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2}$, $\overline{z_1 z_2}$ dhe $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

Zgjidhje. Kemi se

$$\begin{aligned} \overline{z_1} &= 4 + i, \quad \overline{z_2} = -1 - 3i \\ \overline{z_1 z_2} &= (4 + i)(-1 - 3i) = -1 - 13i \\ \overline{z_1 z_2} &= (4 - i)(-1 + 3i) = -1 + 13i = -1 - 13i \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{4+i}{-1-3i} = -\frac{7}{10} + \frac{11}{10}i$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{4-i}{-1+3i}\right)} = \overline{\left(\frac{(4-i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}\right)} = \overline{-\frac{7}{10} - \frac{11}{10}i} = -\frac{7}{10} + \frac{11}{10}i. \blacklozenge$$

Detyra 6. Gjeje numrin reciprok të numrit kompleks

$$z = ((1+3i) + (2-5i))(1-i).$$

Zgjidhje. Prej

$$z = ((1+3i) + (2-5i))(1-i) = ((1+2) + (3-5)i)(1-i) =$$

$$= (3-2i)(1-i) = 1-5i$$

$$\text{vijon se } \frac{1}{z} = \frac{1}{1^2 + (-5)^2} - \frac{(-5)}{1^2 + (-5)^2}i = \frac{1}{26} + \frac{5}{26}i. \blacklozenge$$

Në rastin e përgjithshëm, për çdo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vlen barazimi $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Ngjashëm, për çdo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vlen barazimi $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ($z_2 \neq 0$).

Detyra

1. Gjej prodhimin e numrave kompleks z_1 dhe z_2 , nëse:

a) $z_1 = 8 + 9i$ dhe $z_2 = 6i$ b) $z_1 = -1 + 10i$ dhe $z_2 = -11i$

2. Gjeje numrin reciprok të numrit kompleks $z = 1 + 5i$.

3. Njehso herësin e numrit kompleks z_1 me numrin kompleks z_2 , nëse:

a) $z_1 = 8i$ dhe $z_2 = 6$ b) $z_1 = -16 - 4i$ dhe $z_2 = -8$

4. Gjej pjesën reale dhe imagjinare të numrit kompleks z , nëse:

a) $z = \frac{3-11i}{1+5i}$ b) $z = \frac{8-2i}{-5-3i}$ c) $z = \frac{32+\sqrt{5}i}{1+2\sqrt{5}i}$.

5. Gjej pjesën reale dhe imagjinare të numrit kompleks $\frac{z \cdot \bar{z}}{z - \bar{z}}$ ku $z = \frac{3-11i}{1+5i}$.

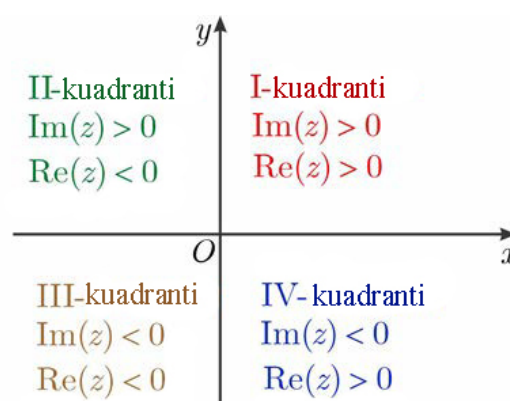
3.4. Paraqitja gjeometrike e numrit kompleks.

Moduli i numrit kompleks

Paraqitja e numrave kompleks në rrafshin kompleks

Në rrafshin II fiksojmë sistem koordinativ kënddrejtë të Dekartit xOy . Rrafshi II së bashku me këtë sistem koordinativ quhet **rrafsh kompleks**, boshti- x quhet **bosht real**, kurse boshti- y quhet **bosht imagjinar**.

Le të jetë $z = a + bi$ çfarëdo numër kompleks. Atëherë numrave realë a dhe b



Vizatimi 1

i korrespondojnë pika të vetme M_1 dhe M_2 të boshti- x , përkatësisht të boshtit- y , përkatësisht. Sipas kësaj, ekziston pikë e vetme M në rrafshin koordinativ, me abshisë a dhe ordinatë b .

Boshti real dhe imagjinar e ndajnë rrafshin kompleks në katër rajone të quajtur kuadrant: kuadranti I, kuadranti II, kuadranti III, dhe kuadranti IV (vizatimi 1). Poashtu numri kompleks z i takon:

kuadrantit I nëse $\text{Im}(z) > 0$ dhe $\text{Re}(z) > 0$;

kuadrantit II nëse $\text{Im}(z) > 0$ dhe $\text{Re}(z) < 0$;

kuadrantit III nëse $\text{Im}(z) < 0$ dhe $\text{Re}(z) < 0$;

kuadrantit IV nëse $\text{Im}(z) < 0$ dhe $\text{Re}(z) > 0$.

Numri real ($\text{Im}(z) = 0$) është pika prej boshti real, ndërsa numri i pastër imagjinar ($\text{Re}(z) = 0$) është pika prej boshtit imagjinar. Numri $z = 0$ ($\text{Re}(z) = 0$) është paraqitur me pikën O (vizatimi 1).

Detyra 1. Te rrafshi kompleks paraqiti numrat:

!) $z = 4 + 3i$

b) $z = 2 - 4i$

c) $z = -2 - 5i$

ç) $z = 6 - 4i$

d) $z = 2$

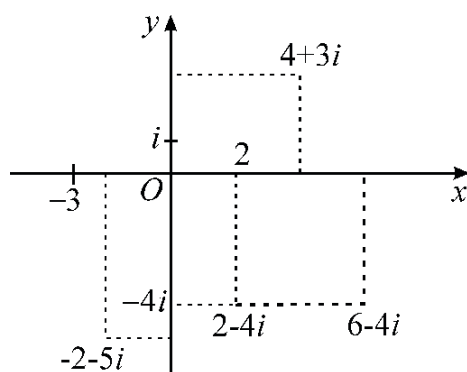
dh) $z = -3$

) $z = i$

f) $z = -4i$

dhe cakto në cilin kuadrant, përkatësisht në cilin bosht i takojnë.

Zgjidhje. **!)** kuadranti I, **b)** kuadranti II, **c)** kuadranti III, **ç)** kuadranti IV, **d)** boshti- x , **dh)** boshti- x , **)** boshti- y , **f)** boshti- y (vizatimi 2). !

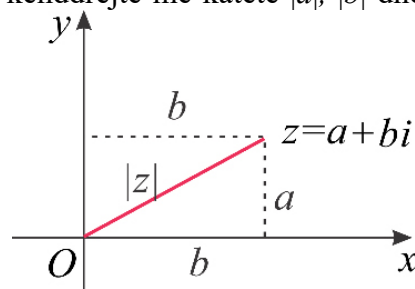


Vizatimi 2

Koncept i rëndësishëm të numrat kompleks është moduli i tyre. Numri kompleks le të jetë $z = a + bi$ paraqitur te rrafshi kompleks me pikën $!$. Largësia prej pikës $!$ deri te pika $!$ në rrafshin kompleks quhet **modul** i numrit kompleks të dhënë dhe shënohet me $|z|$.

Modulin do ta njehsojmë në këtë mënyrë (vizatimi 3). Prej pikës $!$ të numrit kompleks të dhënë lëshojmë normale në boshtin $-x$, ku fitojmë trekëndësh kënddrejtë me katetë $|a|$, $|b|$ dhe hipotenuzë $|z|$. Me zbatimin e teoremës së Pitagorës fitojmë $|z|^2 = |a|^2 + |b|^2$. Duke pasur parasysh barazimin $|x|^2 = x^2$ për çdo numër real x , për modulin e numrit kompleks të dhënë fitojmë $|z|^2 = a^2 + b^2$, përkatësisht

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Vizatimi 3

Pasi $a = \operatorname{Re}(z)$ dhe $b = \operatorname{Im}(z)$, fitojmë se

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

përkatësisht, moduli i numrit kompleks të dhënë është numri real pozitiv, i barabartë me rrënjën katrore prej shumës së katrorëve të pjesës reale dhe imagjinare të numrit kompleks.

Drejtëpërdrejt përfundojmë se $|z| = 0$ nëse dhe vetëm nëse $z = 0$.

Të vërejmë se dy numra kompleks të konjuguar kanë module të barabartë. Me të vërtet për çfarëdo numër kompleks z vlen

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (-\operatorname{Im}(z))^2} = |\bar{z}|$$

përkatësisht

$$|z| = |\bar{z}|.$$

Modulet e barabarta kanë edhe numrat kompleks të kundërt njëri në tjetrin. Për çfarëdo numër kompleks z prej

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{(-\operatorname{Re}(z))^2 + (-\operatorname{Im}(z))^2} = |-z|$$

përfundojmë se

$$|z| = |-\bar{z}|.$$

Detyra 1. Најди го модулот на комплексниот број z , ако:

- a)** $z = -4 + 3i$ **b)** $z = -2i$ **c)** $z = -4$.

Zgjidhje. **a)** Според формулата за пресметување модул на комплексен број добиваме

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

$$\textbf{b)} \quad |z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\textbf{c)} \quad |z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4. \blacklozenge$$

Постои врска помеѓу модулот на комплексен број, самиот број и неговиот конјугирано комплексен број. Имено, за било кој комплексен број z важи

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Detyra 2. Cakto z nëse:

- a)** $z = -2 + i$ **b)** $z = -i$ **c)** $z = 3$

Zgjidhje. **a)** $|z|^2 = (-2 + i)(-2 - i) = 5$ prej ku vijon se $|z| = \sqrt{5}$

b) $|z|^2 = (0 + i)(0 - i) = 1$ prej ku vijon se $|z| = \sqrt{1}$

c) $|z|^2 = (3 + 0i)(3 - 0i) = 9$ prej ku vijon se $|z| = 3$. $\blacklozenge$

Detyra

1. Në rrafshin kompleks paraqiti numrat:

$$\textbf{a)} \quad z = 1 + 2i; \quad \textbf{b)} \quad z = 2 - i; \quad \textbf{c)} \quad z = -2 - \frac{1}{2}i; \quad \textbf{ç)} \quad z = \frac{1}{3} - 4i;$$

$$\textbf{d)} \quad z = \frac{1}{2}; \quad \textbf{dh)} \quad z = -1; \quad \textbf{e)} \quad z = 3i; \quad \textbf{f)} \quad z = -i.$$

dhe cakto në cilin kuadrant, përkatësisht në cilin bosht gjenden.

2. Gjej modulën e numrit kompleks z nëse:

- a) $z = 4 + 2i$ b) $z = -1 = i$ c) $z = 1 = 2i$
 ç) $z = -4 + 2i$ d) $z = -i$ dh) $z = -2$

3. Le të jetë $z = 1 - 2i$ numër kompleks i dhënë. Njehso numrat $|z|$, $|\bar{z}|$ dhe $|-z|$. Krahsoji vlerat e fituara.

4. Gjeje numrin kompleks $z = 3x - i$ ku x është numër real, nëse $|z| = 2$.

5. Gjeje numrin kompleks z të atillë që $2\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ dhe $|z| = 2$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Gjej pjesën reale dhe imagjinare të numrit kompleks z nëse:

- a) $z = -1 - i$ b) $z = -\frac{1}{2}$ c) $z = \sqrt{3} + \sqrt{2}i$

2. Për cilat numra realë x dhe y janë të barabartë numrat kompleks: Најди го конјугирано комплексниот број на бројот z , ако:

- a) $z = 7 - 5i$ b) $z = -\frac{1}{4}i$ c) $z = 1 - \sqrt{3}i$

3. Gjeje numrin kompleks të konjuguar z nëse: Најди ги збирот $z_1 + z_2$ и razlikata $z_1 - z_2$ ако:

- a) $z_1 = 7 - i$ dhe $z_2 = 5 + 3i$ b) $z_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}i$ dhe $z_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

4. Gjeje numrin kompleks të kundërt të numrit kompleks z , nëse:

- a) $\operatorname{Re}(z) = -13$ dhe $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}$ b) $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ dhe $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{2} - 3$

5. Gjej pjesën reale dhe imagjinare të numrit kompleks z , nëse:

- a) $z = (-3 + 2i) - (1 - 7i) + (9 - 5i)$ b) $z = 13i + (1 - 4i) - 4i + 5$

6. Gjej prodhimin $z_1 z_2$ dhe herësin $\frac{z_1}{z_2}$ të numrave kompleks z_1 dhe z_2 , nëse:

- a) $z_1 = 8 - 5i$ dhe $z_2 = 9 - 2i$ b) $z_1 = 4 - 2i$ dhe $z_2 = 12i$

7. Gjej pjesën reale dhe imagjinare të numrit kompleks z , nëse:

- a) $z = \frac{3-i}{1+2i}$ b) $z = \frac{3-2i}{-5-i}$ c) $z = \frac{1-5i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$

8. Paraqiti në rrafshin kompleks numrat:

- a) $z = 1 + 3i$ b) $z = 2 - 4i$ c) $z = -2 + 4i$ ç) $z = 1 - 3i$

9. Paraqiti me vektor numrat kompleks z_1 dhe z_2 , nëse:

- a) $z_1 = 3 + 2i$ dhe $z_2 = 4 + 7i$ b) $z_1 = -2 - 8i$ dhe $z_2 = 16 + 7i$

por pastaj gjeje numrin kompleks të paraqitur me shumën e vektorëve të fituar.

10. Paraqiti me vektor në rrafshin kompleks: numrin kompleks z , me numrin kompleks me të konjuguar $\bar{z}$ dhe me atë numrin kompleks të kundërt $-z$, nëse:

- a) $z = 3 + 2i$ b) $z = -1 - 5i$ c) $z = -2i$ ç) $z = 7$.

11. Cakto modulën e numrit kompleks z , nëse:

- a) $\operatorname{Re}(z) = 3$ dhe $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$ b) $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{4}$ dhe $\operatorname{Im}(z) = 2 - \sqrt{2}$

4. BARAZIMI KATROR

4.1. Barazimi katror. Llojet e barazimeve katrore

Në vitin e kaluar shkollor u njohtëm me konceptet barazim, fusha e përkufizimit të barazimit, zgjidhja e barazimit dhe barazimet ekuivalente.

Barazimi polinom i shkallës së dytë me një të panjohur quhet barazim katror me një të panjohur ose shkurtimisht, **barazim katror**.

Me transformimet përkatëse barazimin mund ta sjellim deri te barazimi ekuivalent të llojit

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (1)$$

të quajtur **lloj i përgjithshëm** i barazimit katror, ku a , b dhe c janë numra realë ose shprehje që nuk varen prej x .

Shembulli 1. a) Barazimi $3x^2 - 4x + 2 = 0$ është barazim katror me koeficientët $a=3$, $b=-4$ dhe $c=2$

Barazimi katror prej llojit të përgjithshëm quhet **barazimi i plotë katror** nëse koeficientët b dhe c janë të ndryshme prej zeros.

Barazimi katror i llojit të përgjithshëm quhet **barazim katror jo i plotë** nëse të paktën njëri prej koeficientëve b dhe c është i barabartë me zero. ♦

Shembulli 2. a) a) Barazimi $3x^2 - x + 5 = 0$ është barazim katror, ndërsa barazimet $2x^2 - 5x = 0$, $x^2 + \frac{1}{2} = 0$ и $7x^2$ jo i plotë. ♦

Nëse barazimin katror (1) e pjesëtojmë me a (ajo është e mundshme pasi $a \neq 0$), e fitojmë barazimin ekuivalent

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Duke venduar $\frac{b}{a} = p$ dhe $\frac{c}{a} = q$ barazimin e dhënë e sjellim deri te barazimi i llojit $x^2 + px + q = 0$ të quajtur **lloj normal** i barazimit katror. Të vërejmë se barazimet (1) dhe (2) janë ekuivalente.

Shembulli 3. Nëse barazimin $2x^2 + 3x - 4 = 0$ e pjesëtojmë me 2 e fitojmë barazimin $x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0$ që është lloj normal. ♦

Zgjidhje ose **rrënjë** e barazimit katror është çdo vlerë e të panjohurës prej bashkësisë së përkufizimit për të cilën barazimi kalon në barazim numerik.

Shembulli 4. a). Numrat realë $x = 3$ dhe $x = -3$ janë rrënjët e barazimit katror $x^2 - 9 = 0$

b). Numrat realë $x = 3$ dhe $x = 5$ janë rrënjë të barazimit $x^2 - 8x + 15 = 0$

c). Numrat kompleks $x = 2i$ dhe $x = -2i$ janë rrënjët e barazimit katror $x^2 + 4 = 0$

Detyra

1. Cili prej këtyre barazimeve është barazim katror:

a) b) c) **A)** $0 \cdot x^2 + 3x - 1 = 0$ **B)** $8x^2 + 5 = 0$ **B)** $3x + 8 = 0?$

2. Provo se $x = 1$ a është rrënjë e barazimit:

a) b) c) **A)** $2x^2 - \frac{3}{2}x = 0$ **B)** $x^2 - 3x + 2 = 0$ **B)** $5x^2 + 4x + 7 = 0.$

3. Transformoju në llojin e përgjithshëm barazimet katrore:

a) **B)** $3x^2 + 2 = 3x$ **B)** $4(x^2 - 2) = 8$ **B)** $\frac{2}{x-4} = x+1, x \neq 4.$ c)

4. Transformoju në llojin e përgjithshëm këto barazimet katrore:

a) b) c) **A)** $2x^2 + 3x + 7 = 0$ **B)** $4x^2 - 2x = 8$ **B)** $3x^2 + 2 = 0.$

5. Cili prej këtyre barazimeve është barazim katror jo i plotë:

a) **B)** $x^2 - 7x - 5 = 0$ **B)** $4x^2 = 2$ **B)** $x^2 + 2,5 - 4x + 5 = 7,5.$ c)

4.2. Zgjidhja e barazimeve katrore jo të plota

Të zgjidhet një barazim katror do të thotë të caktohet bashkësia e zgjidhjeve, përkatësisht të caktohen të gjitha rrënjët e tij ose të konstatohet se ai nuk ka rrënjë. Sikurse përmendëm në kapitullin paraprak, barazimet e formës $ax^2 + bx = 0$, ax^2 dhe $ax^2 + c = 0$ quhen **barazime katrore jo të plota**. Në këtë kapitull do t'i qasemi zgjidhjes së këtyre tre llojeve të barazimeve katrore jo të plota.

Zgjidhja e barazimeve jo të plota të formës $ax^2 + bx = 0$ ose $ax^2 = 0$

Detyra 1. Zgjidhe barazimin katror $3x^2 - 4x = 0$.

Zgjidhje. Anën e majtë të barazimit e zbërthejmë së shumzues, por pastaj duke shfrytëzuar gjykimin se prodhimi i dy shumzuesve është i barabartë me zero nëse dhe vetëm nëse të paktën njëri prej shumzuesve është i barabartë me zero, fitojmë

$$3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ose } 3x - 4 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ose } x = \frac{4}{3})$$

Sipas kësaj rrënjët e barazimit të dhënë janë $x_1 = 0$ dhe $x_2 = \frac{4}{3}$ ♦

Në rastin e përgjithshëm barazimi i formës $ax^2 + bx = 0$

është ekuivalente me barazimin $x(ax + b) = 0$. Duke pasur parasysh se prodhimi i dy shumzuesve është i barabartë me zero nëse dhe vetëm nëse të paktën njëri prej shumzuesve është i barabartë me zero, përfundojmë se $x(ax + b) = 0$. Nëse dhe vetëm nëse $x = 0$ ose $x = -\frac{b}{a}$.

Domethënë, në këtë rast barazimi ka dy rrënjë reale $x_1 = 0$ dhe $x_2 = -\frac{b}{a}$

Të vërejmë se njëra prej rrënjëve është gjithmonë e barabartë me zero.

Detyra 2. Zgjidhe barazimin katror $5x^2 = 0$

Zgjidhje. Për barazimin $5x^2 = 0$ kemi $5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. ♦ ♦

Nëse te barazimi katror $ax^2 + bx = 0$ koeficienti $b = 0$, atëherë ai e merr formën $ax^2 = 0$. Pasi $a \neq 0$. Numri real $x = 0$ është rrënjë e dyfishtë e barazimit të dhënë.

Detyra 3. Zgjidhe barazimin katror $b(x^2 - x) = 0$ ku b është parametër real.

Zgjidhje. Nëse $b = 0$ atëherë çdo numër real $x = x_0$ është zgjidhje e barazimit të dhënë, përkatësisht barazimi ka pafund shumë zgjidhje.

Nëse $b \neq 0$ atëherë barazimi i dhënë është ekuivalent me barazimin $bx(x - 1) = 0$ përkatësisht me barazimin $x(x - 1) = 0$ sipas kësaj, rrënjët e barazimit të dhënë janë $x_1 = 0$ dhe $x_2 = 1$ ♦

Zgjidhja e barazimit jo të plotë katror të formës $ax^2 + c = 0$

Detyra 4. Zgjidhe barazimin katror $x^2 + 1 = 0$

Zgjidhje. Barazimi i dhënë është ekuivalent me barazimin $x^2 = -1$ për të cilën, te kapitulli paraprak, theksuam se për rrënjë e ka njëshen imagjinare i . Pasi $(-i)^2 = (-i)(-i) = (-1)i(-1)i = (-1)^2 i^2 = i^2 = -1$ përfundojmë se edhe numri kompleks $-i$ është rrënjë e barazimit të dhënë. Sipas kësaj, rrënjët e barazimit katror janë $x_1 = i$ dhe $x_2 = -i$. ♦

Detyra 5. Zgjidhe barazimin katror $x^2 - 3 = 0$.

Zgjidhje. Barazimi i dhënë është ekuivalent me barazimin $x^2 = 3$. Pasi dy numra pozitivë janë të barabartë nëse dhe vetëm nëse janë të barabartë katrorët e tyre, kemi $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \pm x = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x = \sqrt{3} \text{ ose } x = -\sqrt{3})$

Prandaj, rrënjët e barazimit të dhënë janë $x_1 = \sqrt{3}$ dhe $x_2 = -\sqrt{3}$. ♦

Në rastin e përgjithshëm barazimi i formës $ax^2 + c = 0$

është ekuivalent me barazimin $x^2 = -\frac{c}{a}$

• Nëse $a > 0$ dhe $c > 0$, ose $a < 0$ dhe $c < 0$ atëherë $-\frac{c}{a}$ është numër negativ real. Në këtë rast,

$\left(\pm i \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 = (\pm i)^2 \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$ prej ku vijon se rrënjët e barazimit të dhënë janë numra kompleks dhe

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}} i, x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}} i.$$

• Nëse $a > 0$ dhe $c < 0$, ose $a < 0$ dhe $c > 0$ atëherë $-\frac{c}{a}$ është numër pozitiv real. Duke pasur parasysh se dy numra pozitivë janë të barabartë nëse dhe vetëm nëse janë të barabartë katrorët e tyre, fitojmë

$\sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ që është ekuivalente me $|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, përkatësisht $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ sipas kësaj

rrënjë e barazimit të dhënë janë $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ dhe $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Detyra 6. Zgjidhe barazimin katror $(x+m)(x-m) = n(2m+n)$

ku m dhe n janë parametra real.

Zgjidhje. Barazimi është ekuivalent me barazimin $x^2 - m^2 = 2mn + n^2$ që më tej është ekuivalente me barazimin $x^2 = (m+n)^2$. Për çdo vlerë të parametrave real m dhe n , barazimi i fundit ka dy rrënjë reale $x_1 = m + n$ dhe $x_2 = -m - n$ ♦

Detyra

1. Zgjidhi këto barazime katrore:

a) b) c) a) $x^2 = 0$ b) $7y^2 = 0$ B) $kx^2 = 0$, k është parametër real.

2. Zgjidhi këto barazime katrore:

a) b) c) ç) d) dh)
 a) $x^2 - 7x = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$ B) $2x^2 - 12x = 0$
 r) $\frac{1}{5}x^2 + 2x = 0$ d) $7x^2 + x = x(x-1)$ f) $(3x-2) - (x-3)^2 + 11 = 0$.

3. Zgjidhi këto barazime katrore:

a) b) c) ç) d) dh)
 a) $x^2 - 9 = 0$ b) $x^2 - 2 = 0$ B) $3x^2 - 2 = 0$
 r) $5x^2 = 125$ d) $\frac{1}{2}y^2 - \frac{8}{25} = 0$ f) $\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}$.

4. Gjeji rrënjët e këtyre barazimeve katrore:

a) b) c) ç) d) dh)
 a) $x^2 + 1 = 0$ b) $2x^2 + 3 = 0$ B) $7x^2 + \frac{1}{2} = 0$
 r) $2y^2 + 13 = 5$ d) $(2x-7)^2 = 25 - 28x$ f) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}-1)x + 3 = 0$.

5. Zgjidhi barazimet:

a) b)
 a) $\frac{ax^2}{b} + \frac{1}{a} = 0$ b) $\frac{ax^2}{b} + \frac{x}{a} = 0$.

4.3. Zgjidhja e barazimit të plotë katror

Në këtë kapitull do të caktojmë algoritmin sikurse edhe formula për zgjidhjen e barazimit të plotë katror.

Le të jetë dhënë barazimi i plotë katror i llojit të përgjithshëm $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Nëse të dy anët e barazimit i pjesëtojmë me $a \neq 0$, vimë deri te barazimi $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

i cili është ekuivalent me atë. Nëse të dy anëve të barazimit të dhënë i shtojmë numrin $\frac{b^2}{4a^2}$ e

fitojmë barazimin $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2}$

i cili është ekuivalent me barazimin e dhënë.

Të vërejmë se tre anëtarët e parë të anës së majtë të barazimit të fundit paraqesin të plotë katror

prej binomit $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ sipas kësaj, barazimin mund

ta shkruajmë në formën $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$ ose $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

Anën e djathtë të barazimit të fundit e shkruajmë në formën $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

duke mos supozuar poashtu shprehja $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)^2$ të jetë jonegative. Duke zbatuar

relacionin e fundit barazimin mund ta shkruajmë në formën $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)^2$

ose, përfundimisht, në formën $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)^2 = 0$

Barazimet (1) dhe (2) janë ekuivalente. Rrënjët e barazimit të fundit i gjejmë në këtë mënyrë: me ndihmën e formulës për ndryshim të katrorëve, e zbërthejmë anën e majtë të shumëzuesve

ku e fitojmë barazimin $\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) = 0$

Duke pasur parasysh se prodhimi i dy shumëzuesve është i barabartë me zero nëse dhe vetëm

nëse të paktën njëri prej shumëzuesve është i barabartë me zero fitojmë se $\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) = 0$

ose $\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) = 0$

Në këtë mënyrë barazimin (1) përkatësisht (2) e zëvendësojmë me dy barazime lineare zgjidhjet e të cilës nuk janë vështirë të caktohen. Me të vërtetë, nëse i shënojmë rrënjët e tyre

me x_1 dhe x_2 përkatësisht, atëherë prej barazimit të parë fitojmë $x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$

ndërsa prej të dytit fitojmë $x_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$

Zakonisht dy formulat e fundit i shkruajmë në një sikurse $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$.

Në këtë mënyrë vimë deri te formula për rrënjët e barazimit të plotë katror $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$

Pas një vargu të transformimeve elementare formulën e dhënë mund ta shkruajmë në formën:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Të vërejmë se mënyra e përmendur për caktimin e rrënjëve të një barazimi katror njëkohësisht tregon se barazimi katror ka saktë dy rrënjë.

Poashtu, nëse $b^2 - 4ac < 0$, do të shkruajmë se $\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}$. Kështu për shembull, $\sqrt{-13} = i\sqrt{-(-13)} = i\sqrt{13}$.

Detyra 1. Zgjidhi këto barazime katrore të plota:

a) b) c)

Zgjidhje. Me zbatimin e formulës (3) fitojmë

$$a) \quad x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{2 \pm 7}{3},$$

prej ku vijon se $x_1 = 3, x_2 = -\frac{5}{3}$ të vërejmë se në këtë rast madhësia nënrrënjësore është numër pozitiv, kurse rrënjët e barazimit janë numra realë të ndryshëm.

$$b) \quad y_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{2 \cdot 5} = \frac{6 \pm \sqrt{-24}}{10} = \frac{6 \pm 2i\sqrt{6}}{10} = \frac{3 \pm i\sqrt{6}}{5},$$

prej ku vijon se $y_1 = \dots\dots\dots, y_2 = \dots\dots\dots$. Në këtë rast madhësia nënrrënjësore është numër negativ, prej ku vijon se rrënjët e barazimit janë numra kompleks të konjuguar.

c) $x_{1,2} = \dots\dots\dots$ prej ku vijon se $x_1 = x_2 = 9$ të vërejmë se në këtë rast madhësia nënrrënjësore është e barabartë me zero. Rrënjët e barazimit janë numra realë të barabartë ndërmjet veti. Në këtë rast themi se barazimi ka një rrënjë të dyfishtë. ♦

Të vërejmë se gjatë nxjerrjes së formulës (3) për zgjidhjen e barazimit të plotë katror (1). Në asnjë hap nuk e shfrytëzuam kushtin $b \neq 0$ dhe $c \neq 0$. Sipas kësaj mund të përfundojmë se formula (3) mund të zbatohet për njehsimin e rrënjëve të barazimit jo të plotë katror.

Detyra 2. Zgjidhi këto barazime katrore jo të plota:

a) b) c) ç)

$$a) \quad x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{4 \pm 4}{6}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

$$b) \quad x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{\pm \sqrt{48}}{8} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{8}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c) \quad y_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{\pm \sqrt{-40}}{4} = \pm i \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad y_1 = i \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad y_2 = -i \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$ç) \quad x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = 0, \quad x_1 = x_2 = 0. \quad \blacklozenge$$

Zgjidhje. Me zbatimin e formulës (3) kemi $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Detyra 3. Zgjidhe barazimin katror $abx^2 - (a^2 - b^2)x - ab = 0$.

Poashtu a dhe b quhen parametra.

Zgjidhje. Sipas formulës (3) kemi

$$x_{1,2} = \frac{a^2 - b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}}{2ab} = \frac{a^2 - b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2}}{2ab} = \frac{a^2 - b^2 \pm (a^2 + b^2)}{2ab},$$

prej ku vijon

Detyra

Zgjidhi këto barazime katrore:

1. a) $x^2 - 4x - 5 = 0$ б) $x^2 - x - 90 = 0$ в) $x^2 - 2x - 8 = 0$
 r) $x^2 + 6x + 4 = 0$ д) $x^2 + 3x - 5 = 0$ ё) $x^2 + 6x + 6 = 0$.
2. a) $(x+3)^2 = 16$ б) $(x-8)^2 = 127 - 18x$ в) $2x(x-2) + 3 = (x+3)^2$
 r) $\frac{x+1}{2} - x(x+1) = \frac{x+2}{3}$ д) $x(x^2 + 3x) - 2x = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.
3. a) $5x^2 - 3x = 0$ б) $3x^2 + 7x = 0$ в) $4y^2 + 9 = 0$
 r) $x^2 - 49 = 0$ д) $x^2 + x = 9x - x^2$ ё) $x(x+2) = 2x+1$.

4. Të zgjidhen këto barazime katrore parametrike:

a) б)

5. Zgjidhi këto barazime katrore parametrike: a) б)

4.4. Diskutimi i zgjidhjeve të barazimit të plotë katror

Prej formulës për njehsimin e rrënjëve të barazimit të plotë katror mund të përfundojmë se varësisht prej koeficientëve të barazimit të dhënë katror ka dy rrënjë reale të ndryshme, një rrënjë të dyfishtë ose dy rrënjë komplekse të konjuguar.

Duke e shfrytëzuar formulën për njehsimin e rrënjëve të barazimit të plotë katror, rrënjët e

barazimit $ax^2 + bx + c = 0$ mund t'i shkruajmë në formën $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ ku $D = b^2 - 4ac$

Me shembullin vijues do ta tregojmë lidhjen e numrit D me natyrën e rrënjëve të barazimit të plotë katror.

Detyra 1. Zgjidhi këto barazime katrore:

- a) б) c) а) $x^2 + 6x - 2 = 0$ б) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ в) $x^2 - 6x + 10 = 0$

Zgjidhje. a). Numri $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 36 + 8 = 44$ është pozitiv, ndërsa rrënjët e barazimit $x_1 = \dots\dots\dots$ dhe $x_2 = \dots\dots\dots$ janë reale dhe të ndryshme.

b). Numri $D = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48 - 48 = 0$ është i barabartë me zero, ndërsa rrënjët e barazimit $x_1 = \dots\dots\dots$ dhe $x_2 = \dots\dots\dots$ janë reale dhe të barabarta.

c). Numri $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4$ është negativ, ndërsa rrënjët e barazimit $x_1 = \dots\dots\dots$ dhe $x_2 = \dots\dots\dots$ janë numra kompleks të konjuguar. ♦

Numri D i caktuar me formulën (3) quhet **diskriminanta** e barazimit katror (1) sikurse që mund të përfundojmë prej shembullit të dhënë ai e cakton natyrën e rrënjëve të një barazimi katror, përkatësisht i kufizon të tre rastet e përmendura.

T'i shqyrtojmë këto tre raste:

1. Nëse $D > 0$ atëherë prej formulës (2) mund të përfundojmë se rrënjët e barazimit katror (1)

janë numra realë. Edhe aq më shumë për shkak $x_1 - x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a} \neq 0$ vijon se $x_1 \neq x_2$ përkatësisht rrënjë e barazimit katror janë të ndryshme.

2. Nëse $D = 0$ atëherë prej formulës (2) mund të përfundojmë se rrënjët e barazimit katror (1)

janë reale dhe të barabarta, përkatësisht $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Në këtë rast themi se barazimi ka një rrënjë të dyfishtë.

3. Nëse $D < 0$ atëherë prej formulës (2) mund të përfundojmë se barazimi ka rrënjë komplekse të konjuguara.

Detyra 2. Pa e zgjidhur çdonjërin prej barazimeve katrore të konstatohet se ai a ka rrënjë reale:

a) b) c)

Zgjidhje. a) Diskriminanta është pozitive, prej ku përfundojmë se rrënjët e barazimit janë reale dhe të ndryshme.

b) Diskriminanta është negative prej ku përfundojmë se barazimi nuk ka rrënjë reale.

c) Diskriminanta është e barabartë me zero, që do të thotë barazimi ka një rrënjë të dyfishtë. ♦

Detyra 3. Njehso vlerën e diskriminantës të këtyre barazimeve katrore, kurse pastaj gjeji rrënjët tyre.

a) b) c)

Zgjidhje. a) Diskriminanta e barazimit katror $D = b^2 = (-5)^2 = 25$ është pozitive, pra rrënjët $x_1 = \dots\dots\dots$ dhe $x_2 = \dots\dots\dots$ janë reale të ndryshme.

b) Diskriminanta e barazimit katror të dhënë $D = b^2 - 4ac = \dots\dots\dots$ është negative. Barazimi nuk ka rrënjë reale.

c) Diskriminanta e barazimit katror të dhënë $D = 0$. Barazimi ka një rrënjë të dyfishtë $x_1 = x_2 = 0$

Detyra 4. Për cilat vlera të parametrin real m , barazimi katror $x^2 + mx + 9 = 0$ ka një rrënjë të dyfishtë? Për çdonjërin prej atyre tri vlerave të m të caktohet rrënja e dyfishtë e barazimit të fituar.

Zgjidhje. Për diskriminantën kemi $D = \dots\dots\dots$. Barazimi ka një rrënjë të dyfishtë nëse $D = 0$, përkatësisht nëse $m^2 - 36 = 0$ sipas kësaj për $m = \pm 6$ barazimi i dhënë ka një rrënjë të dyfishtë. Për $m = 6$ zgjidhja e barazimit është numër real $x = -3$, dhe për $m = -6$ zgjidhja e barazimit është numër real $x = 3$. ♦

Detyra

1. Njehso vlerën e diskriminantës të këtyre barazimeve katrore: a) b) c) ç) d) dh)

Pa e zgjidhur çdonjërin prej barazimeve katrore të caktohet ai a ka rrënjë reale:

2. a) b) c) ç) d) dh)

a) $x^2 + 6x + 3 = 0$

b) $x^2 + 8x + 16 = 0$

b) $x^2 + 6x + 10$

r) $3t^2 - 4t + 2 = 0$

д) $5x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$

r) $\sqrt{5}x^2 - 6x + \sqrt{5} = 0$

3. a)

b)

ç)

d)

dh)

3. a) $x^2 + \frac{5}{4} = x$

b) $\frac{y}{4} + 1 = y$

b) $x^2 + \frac{1}{3}x = 2$

r) $\sqrt{3}x^2 - x - 4\sqrt{3} = 0$

д) $2x^2 - 5x + \sqrt{8} = 0$

r) $7y^2 + 2 = 2\sqrt{14}y$

4. a)

b)

c)

ç)

d)

dh)

4. a) $4x^2 - 3x = 0$

b) $3x^2 + 7x = 0$

b) $4t^2 + 9 = 0$

r) $x^2 - 4 = 0$

д) $x^2 + x = 9x - x^2$

r) $x(x+2) = 2x+1$

e) $x^2 + 12x + 36 = 0$

5. Për cilat vlera të parametrin real k , barazimi

a) ka rrënjë reale b). Nuk ka rrënjë reale?

4.5. Formulatat e Vietit për lidhjen ndërmjet rrënjëve dhe koeficientëve të barazimit katror

Formulat e Vietit

Prej formulës për njehsimin e rrënjëve të barazimit të plotë katror mund të përfundojmë se ekziston lidhje ndërmjet koeficientëve të barazimit katror dhe rrënjëve të tij. Pikërisht, rrënjët e barazimit katror $ax^2 + bx + c = 0$

mund t'i shprehim nëpërmjet koeficientëve $a \neq 0$, b dhe c me ndihmën e formulave $x_1 = \dots\dots\dots$ dhe $x_2 = \dots\dots\dots$

Tani do ta parashatrojmë detyrën e anasjelltë: t'i shprehim koeficientët a , b dhe c nëpërmjet rrënjëve të tij x_1 dhe x_2 .

Shembulli 1. Nëse e zgjidhim barazimin katror $x^2 - 5x + 6 = 0$ ku $a = 1$, $b = -5$ dhe $c = 6$ do të fitojmë se rrënjët e tij janë $x_1 = 3$ dhe $x_2 = 2$ shuma e rrënjëve $x_1 = 3$ dhe $x_2 = 2$ është e barabartë me 5, përkatësisht me koeficientin b me shenjë të kundërt, kurse prodhimi i $x_1 = 3$ dhe $x_2 = 2$ është e barabartë me anëtarin e lirë 6. ♦

Do të tregojmë se kjo veti e barazimit katror $x^2 - 5x + 6 = 0$ vlen për çdo barazim katror.

Teorema 1. (Teorema e Vietit). Nëse x_1 dhe x_2 janë rrënjë të barazimit katror $ax^2 + bx + c =$

0. Atëherë $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ dhe $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Vërtetimi. E dimë se rrënjët e barazimit katror $ax^2 + bx + c = 0$ janë

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Nëse i shumëzojmë rrënjët kemi

Sipas kësaj, koeficientët $a \neq 0$, b dhe c të barazimit katror x_1 dhe x_2 mund të shprehen

nëpërmjet rrënjëve x_1 dhe x_2 me ndihmën e formulave $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

dhe $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

të cilat quhen **formulat e Vietit**.

Është e saktë edhe teorema e anasjelltë e teoremës së Vietit.

Teorema 2. (Teorema e anasjelltë e Vietit). Nëse numrat x_1 dhe x_2 i kënaqin barazimet

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ dhe } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \text{ Atëherë } x_1 \text{ dhe } x_2 \text{ janë rrënjët e barazimit katror } ax^2 + bx + c = 0$$

Vërtetimi. Pasi $a \neq 0$ barazimi katror $ax^2 + bx + c = 0$ është ekuivalent me barazimin

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \text{ Nëse } -\frac{b}{a} \text{ dhe } \frac{c}{a} \text{ i zëvendësojmë me } -(x_1 + x_2) \text{ dhe } x_1 \cdot x_2 \text{ përkatësisht, e}$$

fitojmë barazimin $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$. Nëse në barazimin katror të fituar, të panjohurën e zëvendësojmë në mënyrë të njëpasnjëshme me x_1 , kurse pastaj me x_2 , kemi

$$x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_2 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

$$x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1 \cdot x_2 = x_2^2 - x_1 \cdot x_2 - x_2^2 + x_1 \cdot x_2 = 0$$

prej ku përfundojmë se x_1 dhe x_2 janë pikërisht rrënjët e barazimit katror $ax^2 + bx + c = 0$

Zbatimi i formulave të Vietit

Me zbatimin e formulave të Vietit mund të kontrollojmë se numrat e dhënë a janë rrënjë të një barazimi katror.

Detyra 2. Kontrollo se numrat $x_1 = 2$ dhe $x_2 = 1$ a janë rrënjë të barazimit katror $x^2 - 3x + 2 = 0$

Zgjidhje. Te barazimi katror i dhënë $a = 1$, $b = -3$ dhe $c = 2$. Përveç kësaj, $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$ dhe $\frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$. Nga ana tjetër, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ dhe $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Pasi $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ dhe $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ për shkak të Teoremës 2, numrat $x_1 = 2$ dhe $x_2 = 1$ janë rrënjët e barazimit katror $x^2 - 3x + 2 = 0$ ♦

Lidhja ndërmjet koeficientëve dhe rrënjëve të barazimit katror na mundëson të formojmë barazim katror, nëse i dimë rrënjët e tij.

Detyra 3. Formo barazim katror me rrënjët _____ dhe _____

Zgjidhje. Supozojmë se barazimi katror i kërkuar është i formës _____. Atëherë ai është ekuivalent me barazimin _____. Prej kushtit të detyrës kemi se _____ dhe _____. Për shkak të formulave të Vietit _____ dhe _____ kemi _____ dhe _____ përkatësisht dhe _____ sipas kësaj barazimi i kërkuar është _____ ♦

Detyra 4. Formo barazim katror rrënjët e të cilit janë dy herë më të mëdha prej rrënjëve të barazimit katror _____

Zgjidhje. Le të jetë _____ barazimi i kërkuar. Prej kushtit të detyrës _____ . Atëherë kemi se _____ dhe _____

Barazimi i kërkuar është _____ ♦

Detyra 5. Formo barazim katror rrënjët e të cilit janë të barabarta me katrorët e barazimit katror _____

Zgjidhje. Le të jetë $y^2 + py + q = 0$ barazimi i kërkuar. Atëherë kemi

$$p = -(y_1 + y_2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = -(2^2 + 2 \cdot 5) = -14,$$

$$q = y_1y_2 = x_1^2x_2^2 = (x_1x_2)^2 = (-5)^2 = 25$$

Barazimi katror i kërkuar është $y^2 - 14y + 25 = 0$

Polinomi me një ndryshore të shkallës së dytë quhet trinom katror.

Me zbatimin e formulave të Vietit mund të zbërthehet trinomi katror në shumëzues linear. Pikërisht trinomin e katrorit mund ta shkruajmë në formën

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right).$$

Me zbatimin e formulave të Vietit të barazimit të katrorit kemi se

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Përfundimisht, fitojmë se $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$

Detyra 6. Zbërtheje në shumëzues linear trinomin $2x^2 - 10x - 12.$

Zgjidhje. Me ndihmën e formulave për zgjidhjen e barazimit katror gjejmë se barazimi katror

$2x^2 - 10x - 12 = 0$ ka rrënjë $x_1 = 6$ e $x_2 = -1$. Prej formulës së sipërme e fitojmë zbërthimin $2x^2 - 10x - 12 = 2(x - 6)(x + 1).$ ♦

Detyra 7. Për cilat vlera të parametrin real m rrënjët e barazimit katror e kënaqin barazimin

Zgjidhje. Për shkak të formulave të Vietit kemi

$$x_1 + x_2 = -3$$

$$x_1 \cdot x_2 = m.$$

Formula e parë e Vietit së bashku me kushtin e detyrës përcakton sistem prej dy barazimeve lineare sipas të panjohurave dhe

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases},$$

zgjidhja e të cilit është dhe Duke zëvendësuar vlerat e fituara për te formula e dytë e Vietit kemi prej ku vijon se ♦

Formula e parë e Vietit së bashku me kushtin e detyrës përcakton sistem prej dy barazimeve lineare sipas të panjohurave dhe

zgjidhja e të cilit është dhe . Duke zëvendësuar vlerat e fituara për te formula e dytë e Vietit kemi prej ku vijon se ♦

Detyra 8. Shuma e dy numrave është , ndërsa prodhimi i tyre është . Cilat janë ata numra?

Zgjidhje. Prej teoremës së anasjelltë të Vietit vijon se numrat e kërkuar x_1 dhe x_2 janë rrënjët e

barazimit ose sipas kësaj, kemi se dhe $x_1 = \frac{2}{3}$ e $x_2 = \frac{1}{6}$. ♦

Detyra 9. Le të jenë x_1 dhe x_2 rrënjët e barazimit . Pa e zgjidhur barazimin të caktohet vlera e parametrin real m , ashtu që

$$x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{1}{m} \cdot \frac{2m-1}{m} = \frac{2m-1}{m^2}$$

Zgjidhje. Prej formulave të Vietit kemi)

pra . Prej këtu e fitojmë barazimin katror, që ka rrënjë të dyfishtë $m = 1$. Ajo është vlera e kërkuar e

Detyra 10. Pa e zgjidhur barazimin katror , cakto vlerën e shprehjes a) b)

a) $x_1^2 + x_2^2$ б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

$$\text{a) } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{37}{9}$$

Zgjidhje: a) b)

$$\text{б) } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{\frac{37}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{37}{6} .$$

Detyra

1. Njehso shumën dhe prodhimin e rrënjëve të këtyre barazimeve katrore: a) b) c) ç) d) dh)

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ б) $x^2 + 2x - 1 = 0$ в) $x^2 - 37x + 27 = 0$
 г) $x^2 - 15 = 0$ д) $-x^2 + 7x - 3 = 0$ е) $ax^2 - (a^2 + 9)x - 9 = 0$.

2. Formo barazim katror rrënjët e të cilit janë: a) b) c) ç) d) dh)

a) $x_1 = 5, x_2 = -7$ б) $x_1 = -3, x_2 = -5$ в) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -4$
 г) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -\frac{2}{5}$ д) $x_1 = 2\sqrt{3}, x_2 = -5\sqrt{3}$ е) $x_1 = 3 - \sqrt{5}, x_2 = 3 + \sqrt{5}$.

3. Pa e zgjidhur barazimin cakto rrënjët e tij: a) b) c) ç) d) dh)

a) $x^2 - 9x + 20 = 0$ б) $6x^2 - 17x + 10 = 0$ в) $x^2 + 11x - 12 = 0$
 г) $x^2 + 2x - 15 = 0$ д) $x^2 - (2p + 1)x + 2p = 0$ е) $x^2 + (3a - 1)x - 3a = 0$.

4. Zbërtheji në shumëzues linear trinomet: a) b) c)

a) $x^2 + x - 2$ б) $3x^2 - 9x - 12$ в) $2x^2 - 72$.

5. Le të jenë x_1 dhe x_2 rrënjë të barazimit . Pa e zgjidhur barazimin të caktohet vlera e parametrin real m , ashtu që

6. Shuma e dy numrave është -2, ndërsa prodhimi i tyre është . Cilët janë ata numra?

7. Formo barazim katror rrënjët e të cilës janë reciproke me rrënjët e barazimit katror

4.6. Zbatimi i barazimit katror

Barazimet katrore kanë zbatim të madh në matematikë, fizikë, kimi dhe në shkenca të tjera.

Mënyra e zgjidhjes së problemeve me ndihmën e aparatit matematikor i përmban zakonisht këta hapa.

Hapi 1. Caktimi i madhësive të njohura dhe të panjohura, si edhe përcaktimi i bashkësisë së vlerave për madhësitë e panjohura;

Hapi 2. Sipas kushteve të detyra shprehet lidhja ndërmjet madhësive, përkatësisht formohen barazime dhe pabarazime;

Hapi 3. Zgjidhja e barazimeve dhe pabarazimeve të fituara;

Hapi 4. Interpretimi i rezultateve të fituara në pajtim me kushtet e detyrës;

Hapi 5. Prova e rezultatit.

Detyra 1. Prodhi i dy numrave të njëpasnjëshëm natyror tek është i barabartë me 195. Cilët janë ata numra?

Zgjidhje. Hapi 1. Ta shënojmë me x më të voglin prej dy numrave të kërkuar. Atëherë më i madhi prej numrave e ka formën

Hapi 2. Në pajtim me kushtin të detyra x është numër natyror tek dhe . Numri i kërkuar është zgjidhje e barazimit katror

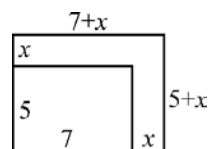
Hapi 3. Rrënjë e barazimit katror të fituar është dhe

Hapi 4. Zgjidhja e eliminuam pasin -15 nuk është numër natyror. Prandaj, më i vogli prej të dy numrave të kërkuar është numri 13. Atëherë numri më i madh është

Hapi 5. Prova: 13 dhe 15 janë numra natyrorë tek të njëpasnjëshëm ♦

Detyra 2. Kopshti në formë të drejtkëndëshit është 5 metra e gjerë dhe 7 metra e gjatë. Nëse gjerësinë dhe gjatësinë e kopshtit e zmadhojmë për vlerë të njëjtë, atëherë syprina e kopshtit do të zmadhohet për 28 metra katrorë. Për sa janë zmadhuar gjatësia dhe gjerësia e kopshtit?

Zgjidhje. Hapi 1. Gjerësinë dhe gjatësinë e kopshtit le t'i zmadhojmë për x metra (vizatimi 1).



Vizatimi 1

Hapi 2. Dimensionet e reja të kopshtit janë dhe . Atëherë syprina e re do të jetë . Prej kushtit të detyrës fitojmë se sipas asaj e fitojmë barazimin katror përkatësisht

Hapi 3. Rrënjët e fituara të barazimit katror janë dhe

Hapi 4. Pasi zmadhimi i gjatësisë është madhësi pozitive përfundojmë se vetëm 2 është zgjidhje e problemit të parashtruar, përkatësisht gjerësia dhe gjatësia e kopshtit zmadhohet për 2 metra.

Hapi 5. Kontrolli: Gjerësia e re e kopshtit është metra, kurse gjatësia e re metra. Syprina e kopshtit të dhënë metra katrorë, ndërsa syprina e kopshtit të ri do të jetë metra katrorë. Zmadhimi i syprinës është metra katrorë. ♦

Detyra 3. Një fabrikë për barna obligohet të dërgojë 600 pako prej një bari për kohë të caktuar. Me zmadhimin e produktivitetit të punës në fabrikë, norma ditore është zmadhuar për 10 paketime, pra në këtë mënyrë dërgesa është kryer 3 ditë më herët prej asaj që është planifikuar. Sa paketime të barit fabrika ka prodhuar në ditë? Për sa ditë është kryer dërgesa?

Zgjidhje. Me x le ta shënojmë numrin e paketimeve ditore të cilat janë planifikuar në fillim të dërgesës. Atëherë numri i ditëve për atë dërgesë është . Me zmadhimin e produktivitetit, numri i paketimeve ditore është bërë , kurse numri i ditëve . Në këtë mënyrë e fitojmë barazimin . Me rregullimin e barazimit të fituar . Zgjidhjet e tij janë dhe . Pasi x e shënon numrin e paketimeve ditore, zgjidhja e dytë nuk ka kuptim, pra hidhet. Mund të përfundojmë se në fillim nga 40 paketime ditore, por kjo do të thotë se ditë të nevojshme për dërgesë. Me zmadhimin e produktivitetit janë prodhuar nga 50 paketime për 12 ditë. ♦

Detyra

1. Perimetri i një kopshti drejtkëndor është për 261 më i vogël se syprina e tij. Brinjët e kopshtit janë dy numra natyrorë të njëpasnjëshëm. Cilët janë ata numra?
2. Hapësira e ekspozitës e ka bazën e drejtkëndëshit me syprinë 60m^2 . Njehso perimetrin e drejtkëndëshit nëse njëra brinjë është për 4m më e madhe prej tjetrës.
3. Një oborr e ka formën e drejtkëndëshit me syprinë prej sa metra tel është i nevojshëm për rrethimin e tyre nëse njëra brinjë e oborrit është për 5m më e shkurtër prej tjetrës, kurse për dyert e hyrjes duhet të ngelin 5m?
4. Çmimi i kostos së një pajisjeje elektrike është 25 euro. Pas zvogëlimit të dyfishtë të çmimit është 18 euro. Për sa përqind është zvogëluar çmimi i pajisjes elektrike herën e parë, përkatësisht herën e dytë, nëse përqindja e zvogëlimit të dytë është dy herë më e madhe prej përqindjes së zvogëlimit të parë?
5. Një rezervuar me tretje për dezinfektim mbushet nëpërmjet dy gypave e gjerësi të ndryshme. Koha për të cilën mbushet nëpër gypin më të gjerë është për 5 orë më e shkurtër prej kohës e cila është e nevojshme të mbushet nëpër gypin më të ngushtë. Nëpër të dy gypat njëkohësisht mbushet për 6 orë. Cakto për sa kohë rezervuari do të mbushet nëpër çdo gyp në veçanti?

4.7. Barazimet racionale thyesore

Sikurse e dimë, barazimi i cili përmban vetëm funksione polinome quhet **barazim algjebrik**, ndërsa barazimi i cili përmban funksion racional thyesor quhet **barazim racional thyesor**. Do të supozojmë se e panjohura pranon vlera në bashkësinë e numrave realë.

Shembulli 1. Barazimi është barazim algjebrik, ndërsa barazimet dhe janë barazime racionale thyesore. ♦

Në vazhdimë do të mësojmë barazime racionale thyesore me një të panjohur zgjidhja e të cilës sillet në zgjidhjen e barazimit linear ose katorr.

$$\frac{12}{x} - \frac{9-x}{x-3} = 1.$$

Detyra 1. Zgjidhe barazimin

Zgjidhje. Hapi 1. Së pari ta caktojmë bashkësinë e përkufizimit të barazimit të dhënë, përkatësisht t'i caktojmë të gjitha vlerat për të cilat barazimi ka kuptim. Pasi emëruesi të thyesave të barazimi anulohen për $x = 0$ dhe $x = 3$ përfundojmë se bashkësinë e përkufizimit të barazimit të dhënë e përbëjnë të gjithë numrat realë $x \neq 0$ dhe $x \neq 3$.

Hapi 2. Kërkojmë shumëfish më të vogël të përbashkët (SHVP) prej emëruesve të thyesave të cilët paraqiten te barazimi. Në rastin SHVP prej emëruesve të thyesave të barazimi i dhënë

$$\frac{\frac{x}{12} - \frac{x-3}{9-x}}{\frac{x}{x} - \frac{x-3}{x-3}} = \frac{x(x-3)}{1}.$$

është

Hapi 3. Të dy anët e barazimeve të dhëna i shumëzojmë me të ashtuquajturën SHVP prej emëruesve të thyesave, përkatësisht barazimi i dhënë lirohet prej emëruesve me të cilën ai kalon në barazim algjebrik. Në rastin tone e fitojmë barazimin

$$12(x-3) - x(9-x) = x(x-3).$$

Hapi 4. E zgjidhim barazimin algjebrik të fituar, i cili është ekuivalente me barazimin e dhënë për të gjitha vlerat e x prej bashkësisë së përkufizuar. Barazimi është ekuivalent me barazimin përkatësisht me barazimin $x = 6$.

Pasi gjatë $x = 6$ vlen përfundojmë se barazimi racional thyesor i dhënë dhe barazimi i fituar $x = 6$ janë ekuivalent. Përfundimisht, fitojmë se zgjidhje e barazimit të dhënë është $x = 6$.

♦

$$\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1}.$$

Detyra 2. Zgjidhe barazimin

Zgjidhje. Hapi 1. Pasi emëruesi të thyesave të barazimi anulohen për $x = 1$ dhe $x = -1$ përfundojmë se bashkësinë e përkufizimit të barazimit të dhënë e përbëjnë të gjithë numrat realë dhe

Hapi 2. Kërkojmë shumëfishin më të vogël të përbashkët (SHVP) prej emëruesve të thyesave të cilat paraqiten te barazimi. Për këtë qëllim e zbërthejmë trinomin katorr . Në barazime lineare . Atëherë SHVP prej emëruesve të thyesave të barazimi i dhënë është

$$\frac{\frac{x-1}{x} - \frac{(x-1)(x+1)}{1}}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1}.$$

Hapi 3. Barazimi i dhënë lirohet prej emëruesve me të cilët ai kalon në barazim algjebrik $x^2 - x - x^2 + 1 = x + 1 + 2$.

Hapi 4. E zgjidhim barazimin algjebrik të fituar, i cili është ekuivalent me të dhënin për të gjitha vlerat e x prej bashkësisë së përkufizimit. Barazimi është ekuivalent me barazimin përkatësisht me barazimin .

Vlera e fituar për . Nuk është bashkësia e përkufizimit të barazimit racional të dhënë thyesor. Sipas kësaj, $x = -1$ është rrënja e barazimit algjebrik , kurse nuk është rrënja e barazimit racional të dhënë thyesor. Domethënë, barazimi racional thyesor nuk ka zgjidhje. ♦

Vlera e fituar për . Nuk është në bashkësinë e përkufizimit të barazimit racional thyesor. Prandaj, është rrënjë e barazimit algjebrik , por nuk është rrënjë e barazimit racional thyesor. Domethënë, barazimi racional thyesor nuk ka zgjidhje. ♦

$$\frac{6}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$$

Detyra 3. Zgjidhe barazimin

Zgjidhje. Hapi 1. Pasi emëruesi të thyesave të barazimi anulohen për $x = 1$ dhe $x = -1$ përfundojmë se bashkësinë e përkufizimit të barazimit të dhënë e përbëjnë të gjithë numrat realë $x = 1$ dhe $x = -1$

Hapi 2. SHVP prej emëruesve të thyesave të cilat paraqiten të barazimi është

Hapi 3. Barazimi i dhënë lirohet prej emëruesve me të cilët ai kalon në barazim algjebrik

$$\frac{6}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$$

(x-1)(x+1)

i cili është ekuivalente me barazimin katror

Hapi 4. Barazimi i fundit ka dy rrënjë dhe . Poashtu rrënja është rrënjë e barazimit të dhënë racional, pasi i plotëson kushtet te rrënja e dytë . Nuk është rrënjë e barazimit racional thyesor, pasi nuk i plotëson kushtet përkatësisht nuk i takon bashkësisë së përkufizimit të barazimit racional thyesor. ♦

Nëse në vetë fillimin gjatë zgjidhjes së një barazimi racional thyesor nuk e kemi konstatuar bashkësinë e përkufizimit të panjohurës, atëherë pas fitimit të zgjidhjeve të barazimit algjebrik duhet të kontrollojmë se çdo zgjidhje e barazimit algjebrik a është zgjidhje e barazimit racional të dhënë thyesor. Ky përfundim del prej faktit se gjatë lirim të barazimit racional thyesor prej emëruesit (i cili e përmban të panjohurën) i shumëzojmë me SHVP të gjitha shprehjet të barazimi.

Me këtë fitojmë barazim algjebrik, bashkësia e përkufizimit të të cilit është më e gjerë prej bashkësisë së përkufizimit të barazimit racional thyesor pasi nuk e respektojmë teoremën për barazime ekuivalente, e cila paraqet shumëzues jozero. Për këtë shkak barazimi algjebrik i fituar dhe barazimi i dhënë racional thyesor jo gjithmonë janë ekuivalent.

Shembulli 2. Barazimi racional thyesor . Nuk ka kuptim për $x = 3$, ndërsa barazimi algjebrik , që fitohet me lirim të barazimit racional thyesor prej emëruesit, ka kuptim për çdo numër real x . Sipas kësaj, të dy barazimet nuk janë ekuivalente. ♦

Deri tani shembujt e zgjidhur dhe diskutimi i bërë tregojnë se për të zgjidhur një barazim racional thyesor duhet t'i realizojmë këta hapa:

Hapi 1. Ta caktojmë bashkësinë e përkufizimit të barazimit të dhënë, përkatësisht t'i caktojmë vlerat e të panjohurës për të cilat barazimi ka kuptim.

Hapi 2. Të caktohet shumëfishi më i vogël i përbashkët (SHVP) prej emëruesve të të gjitha shprehjeve të barazimi.

Hapi 3. Ta lirojmë barazimin prej emëruesit.

Hapi 4. Ta zgjidhim barazimin algjebrik të fituar, i cili është ekuivalent me barazimin e dhënë për të gjitha vlerat e x prej bashkësisë së përkufizimit.

Në vazhdimë do të zgjidhim barazim racional thyesor parametrik.

Detyra 4*. Zgjidhe barazimi racional thyesor parametrik

ku a dhe b janë parametra real jozero.

Zgjidhje. Barazimi i dhënë ka kuptim për çdo numër real $x \neq 0$.

SHVP prej emëruesve të thyesave të cilat paraqiten te barazimi është

Barazimi i dhënë lirohet prej emëruesit me të cilin ai kalon në barazim algjebrik i cili është ekuivalent me barazimin katror

Nëse . Atëherë çdo numër real $x \neq 0$ është zgjidhje e barazimit katror.

Nëse . Atëherë barazimi i fundit është ekuivalent me barazimin

rrënjët e të cilit janë dhe

Sipas kësaj mund të përfundojmë se, nëse . Atëherë për çdo numër real $x \neq 0$ është rrënjë e barazimit racional thyesor, ndërsa nëse . Atëherë ai ka dy rrënjë reale dhe ♦

Detyra

1. Çakto bashkësinë e përkufizimit të këtyre barazimeve: a) b)

a) $\frac{3}{4x-5} = 4 - \frac{1}{x-2}$ b) $\frac{x+3}{2} + \frac{1}{(x-5)(x+1)} = 7.$

2. Për cilat vlera të x është i saktë gjykimi:

a) $\frac{1}{x-3} \neq \frac{1}{x+3}$ b) $\frac{x^2-9}{x} \neq \frac{3x+1}{3}$ B) $\frac{x+8}{x} \neq 1 + \frac{8}{x}?$

3. Për cilat vlera të x janë të barabarta shprehjet e dhëna: a) b) c) ç)

a) $\frac{1}{x} = \frac{x}{3}$ b) $\frac{x}{x+1} = x+2$
 B) $\frac{-3x+4}{1-x} = \frac{x+2}{x}$ r) $\frac{4}{9y^2-1} + \frac{5y}{3y-1} = \frac{4}{3y+1}$

4. Zgjidhi këto barazime racionale thyesore a) b) c) ç)

a) $\frac{x}{x^2+2x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{-x}{x-1}$ b) $\frac{x+3}{2x-1} - \frac{x}{x+2} - \frac{x^2}{2x^2+3x-2} = 1$

$$\text{b)} \frac{x}{x^2-6x-7} + \frac{1}{x-7} = \frac{3x+1}{x^2+x} \quad \text{r)} \frac{x+1}{x^2+8x-7} = 1.$$

*5. Zgjidhe barazimin racional thyesor parametrik jozero.

ku a dhe b janë parametra real

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Cakto numrin e të panjohurave dhe shkallën e këtyre barazimeve: a) b) c)

$$\text{a)} -\frac{1}{2}x + 2 = 1 \quad \text{b)} (x^2 - 7)^2 = 4x - 1 \quad \text{b)} xy + 12x = y.$$

2. Transformoju në formën normale këto barazime katrore: a) b) c)

$$\text{a)} 4x^2 + 7x - 1 = 0 \quad \text{b)} -x^2 - 2x = 5 \quad \text{b)} \frac{1}{2}x^2 = \frac{x+1}{3}.$$

3. Zgjidhi këto barazime katrore: a) b) c)

$$\text{a)} x^2 - 2x = 0 \quad \text{b)} 4x^2 + x = x(2x - 1) \quad \text{b)} ax^2 - bx = x^2.$$

4. Gjeji rrënjët e këtyre barazimeve katrore: a) b) c)

$$\text{a)} 3x^2 + 2 = 0 \quad \text{b)} \left(3x + \frac{3}{2}\right)\left(3x - \frac{3}{2}\right) = 54 \quad \text{b)} x^2 - a^2 = b^2 - 2ab.$$

5. Zgjidhi këto barazime katrore: a) b) c) ç)

$$\text{a)} x^2 - x - 42 = 0 \quad \text{b)} y^2 + 2y - 143 = 0 \\ \text{b)} x^2 - 18x + 81 = 0 \quad \text{r)} (x-2)^2 + (x+3)^2 = 3x^2 - 22$$

6. Cakto parametrin a ashtu që barazimi ka:

a) rrënjë reale të ndryshme b) rrënjë komplekse të konjuguara.

7. Thjeshto thyesën: a) b) c)

$$\text{a)} \frac{2x^2 - x - 15}{x^2 - 9} \quad \text{b)} \frac{x^2 - 5x - 14}{-x^2 + 2x + 35} \quad \text{b)} \frac{7a^2 + 12a - 4}{3a^2 + 5a - 2}.$$

8. Për cilën vlerë të parametrin p barazimi

a) është katror b) është linear c) ka rrënjë të dyfishtë ç) ka dy rrënjë reale të ndryshme

9. Largësia ndërmjet qendrave të blerjes së primeve, A dhe B është 588km. Treni i transportit prej A deri në B e kalon largësinë për 2 orë dhe 20 minuta, më shpejt se treni transportues prej B kah A. Çfarë shpejtësie ka çdonjëri prej trenave nëse shpejtësitë e tyre ndryshojnë për 21km/h?

10. Kopshti drejtkëndor, 4m i gjerë dhe 6m i gjatë, është rrethuar me rrugë me gjerësi të njëjtë. Gjej gjerësinë e rrugës nëse syprina e rrugës është e barabartë me syprinën e kopshtit.

11. Zgjidhi këto barazime racionale thyesore: a) b)

$$\text{a)} \frac{1+x}{x-1} - \frac{x-1}{1+x} = \frac{12}{1-x^2} \quad \text{b)} \frac{x+1}{x^2+8x+7} = 1.$$

12. Dy kamionë për transport të drurëve, të larguar ndërmjet veti 300km, nisen njëri përballë tjetrit, në rrugën e njëjtë. Kamioni i parë e ka shpejtësinë për 5km/h më të madhe se shpejtësia e të dytit. Kamioni i parë do të kalojë gjysmën e rrugës, për kohën e cila është për 7 orë më e shkurtër prej kohës së kalimit të rrugës për të dy kamionët. Cakto shpejtësinë dhe kohën e kalimit të rrugës për të dy kamionët

5. BARAZIMET PREJ LLOJIT KATROR. BARAZIMET IRACIONALE. SISTEMI PREJ NJË BARAZIMI KATROR DHE NJË LINEAR ME DY TË PANJOHURA

5.1. Barazime bikatrore

Barazimet e llojit

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (1)$$

ku a , b dhe c janë numra realë ose shprehje që nuk varen prej të panjohurës x , quhet **barazim bikator**.

Shembulli 1. Barazimet $2x^4 - 7x^2 + 20 = 0$, $\frac{x^4}{2} + 3x^2 + 20 = 0$, $x^4 + \sqrt{3}x^2 = 0$, $5x^4 = \frac{2}{3}$ dhe $3x^4 = 0$ janë shembuj për barazime bikatrore. ♦

Të vërejmë se te barazimi bikator, e panjohura x paraqitet vetëm në fuqi çift. Me futjen e

$$x^2 = y$$

zëvendësimit ...

barazimi (1) transformohet në barazim katror sipas të panjohurës y , përkatësisht te barazimi

$$ay^2 + by + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (2)$$

• Nëse diskriminanta e barazimit (2), $\Delta = b^2 - 4ac$. Atëherë ai ka dy rrënjë reale y_1 dhe y_2 . Pas përcaktimit të rrënjëve të barazimit (1) kthehemi te zëvendësimi i futur, përkatësisht i zgjidhim barazimet katrore dhe

Të gjitha rrënjët reale të dy barazimeve të fundit, janë rrënjë të barazimit bikator (1). Nëse asnjëri prej atyre nuk ka rrënjë reale, atëherë barazimi bikator nuk ka rrënjë reale.

• Nëse diskriminanta e barazimit (2), $\Delta < 0$. Atëherë ai nuk ka rrënjë reale, Prandaj, ai dhe barazimi bikator nuk kanë rrënjë reale.

Prej diskutimit të bërë nuk është vështirë të përfundohet se zgjidhja e barazimit bikator mund të sillet në zgjidhjen e barazimit bikator.

$$x^4 - 34x^2 + 225 = 0.$$

Detyra 2. Zgjidhe barazimin bikator

Zgjidhje. Me futjen e zëvendësimit $x^2 = y$

$$y^2 - 34y + 225 = 0.$$

e fitojmë barazimin bikator

Me zbatimin e formulës për njehsimin e rrënjëve të barazimit katror, fitojmë

$$y_{1,2} = \frac{-(-34) \pm \sqrt{(-34)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 225}}{2 \cdot 1} = 17 \pm \sqrt{64} = 17 \pm 8,$$

përkatësisht $y_1 = 25$ и $y_2 = 9$. Nëse kthehemi te zëvendësimi i futur, përkatësisht nëse i

zgjidhim barazime $x^2 = 25$ и $x^2 = 9$

fitojmë se barazimi bikatorr ka katër rrënjë reale $x_1 = 5, x_2 = -5, x_3 = 3 \text{ n } x_4 = -3$.
Të vërejmë se rrënjët e fituara janë dyshë simetrike në lidhje me boshtin real (± 5 dhe ± 3). ♦

Detyra 3. Zgjidhe barazimin bikatorr $x^4 + x^2 - 20 = 0$.

Zgjidhje. Me futjen e zëvendësimit $y^2 + y + 20 = 0$ e fitojmë barazimin bikatorr
rrënjët e të cilit janë $y_1 = 4 \text{ n } y_2 = -5$.

Në atë rast prej të dy barazimeve $x^2 = 4 \text{ n } x^2 = -5$
zgjidhje reale ka vetëm barazimi i parë dhe ato janë $x_1 = 2, x_2 = -2$.
Sipas kësaj, barazimi i dhënë bikatorr ka dy rrënjë reale $x_1 = 2 \text{ n } x_2 = -2$. ♦

Dy zgjidhjet e tjera të barazimit katror janë komplekse d.m.th., $x_3 = i\sqrt{5}, x_4 = -i\sqrt{5}$ ♦

Detyra 4. Zgjidhe barazimin bikatorr $x^4 - 7x^2 = 0$.

Zgjidhje. Me futjen e zëvendësimit $x^2 = y$
e fitojmë barazimin katror $y_1 = 0 \text{ n } y_2 = 7$.

rrënjët e të cilit janë $x^2 = 0 \text{ n } x^2 = 7$
Duke i zgjidhur barazimet dhe
fitojmë se barazimi bikatorr ka katër rrënjë reale prej të cilave një rrënjë e dyfishtë dhe dy të
ndryshme $x_3 = 7 \text{ n } x_4 = -7$. ♦

Detyra 5. Zgjidhe barazimin bikatorr

Zgjidhje. Me futjen e zëvendësimit
e fitojmë barazimin katror

$y_1 = 0 \text{ n } y_2 = -\frac{3}{5}$.
rrënjët e të cilit janë

$x^2 = 0 \text{ n } x^2 = -\frac{3}{5}$
Në atë rast prej të dy barazimeve
vetëm barazimi i parë ka një rrënjë të dyfishtë
sipas kësaj, barazimi bikatorr i dhënë

ka një rrënjë të dyfishtë dhe dy rrënjë komplekse
 $x_3 = -i\sqrt{\frac{3}{5}} \text{ n } x_4 = i\sqrt{\frac{3}{5}}$. ♦

Detyra 6. Barazimi $7x^4 + 3 = 0$ a ka zgjidhje reale?

Zgjidhje. Me futjen e zëvendësimit $x = y^2$ e fitojmë barazimin katror $y^4 - 11y^2 + 24 = 0$ e cila ka rrënjë reale. Sipas kësaj, barazimi i dhënë bikator nuk ka rrënjë reale. ♦
 Prej shembujve të paraqitur nuk është vështirë të përfundohet se një barazim bikator ka ose katër ose dy ose nuk ka asnjë rrënjë reale.
 Përveç kësaj nëse një numër real a është rrënjë e barazimit bikator atëherë $-a$ është gjithashtu rrënjë e barazimit.
 Pasi mund të përfundojmë se numri i kundërt i tij real $-a$ është gjithashtu rrënjë e barazimit. Më tutje nëse $a \neq 0$ është rrënjë e një barazimi bikator, atëherë prej a vijon përkatësisht $c = 0$. Prandaj, mund të përfundojmë se barazimi i shqyrtuar bikator është i formës $x^2 + px + q = 0$. Barazimi i fundit ka dy rrënjë reale të barabarta me zero. Sipas kësaj nëse barazimi bikator ka rrënjë a atëherë ai është rrënjë e dyfishtë. Edhe aq më shumë nëse $b = 0$ atëherë a është rrënjë katërshe.
 Sipas kësaj rrënjët e një barazimi bikator janë numra realë të cilët të shqyrtuar te boshti numerik janë simetrike në lidhje me zeron.

Detyra

- Cilat prej këtyre barazimeve janë barazime bikatore: a) b) c) ç) d) dh)
 a) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$; b) $3x^4 - 7x^2 + 1 = 0$; c) $x^3 + 2x^2 - 7 = 0$;
 d) $2x^4 - 9 = 0$; e) $3x^4 - 2x^2 = 0$; f) $7x^4 - 2x = 0$.
- Caktoji rrënjët e këtyre barazimeve bikatore: a) b) c) ç) d) dh)
 a) $9x^4 - 226x^2 + 25 = 0$; b) $-36x^4 + 25x^2 - 4 = 0$; c) $t^4 - 13t^2 + 36 = 0$;
 d) $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$; e) $4x^4 - 1 = 0$; f) $49x^4 + 2x^2 = 0$.
- Zgjidhi këto barazime bikatore: a) b) c) ç) d) dh)
 a) $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$; b) $3x^4 - 8x^2 - 3 = 0$; c) $4t^4 - 17t^2 + 4 = 0$;
 d) $7x^4 + 3 = 0$; e) $64x^4 - 9x^2 = 0$; f) $49x^4 - 81 = 0$.
- Sa rrënjë kanë këto barazime bikatore? a) b) c) ç) d) dh)
 a) $9x^4 - 38x^2 + 8 = 0$; b) $-x^4 - 5x^2 - 4 = 0$; c) $t^4 - 13t^2 + 36 = 0$;
 d) $x^4 + 5x^2 + 8 = 0$; e) $(z^2 - 3)^2 - 16 = 0$; f) $(x^2 + 1)^2 - 3(x^2 + 1) = 2$.
- Zbërtheji në shumëzues polinomet:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $4y^4 - 29y^2 + 25 = 0$.

- a) b) c) ç) d) dh) Thjeshtoji thyestat: a) b)

a) $\frac{x^4 - 16}{x^4 - 13x^2 + 36}$; b) $\frac{x^4 - 11x^2 + 24}{x^4 - 17x^2 + 72}$.

5.2. Barazimet që sillen në katror me zëvendësim përkatës

Ekzistojnë lloje të ndryshme të barazimeve të cilat me zëvendësim dhe transformime të caktuara mund të sillen në zgjidhjen e barazimeve katrore. Disa prej atyre barazimeve duhet t'i zbërthejmë paraprakisht në shumëzues me ndihmën e formulave për shumëzim të shkurtuar.

Zgjidhja e disa barazimeve binomiale

Shembulli 1. Barazimin mund ta zgjidhim nëse paraprakisht e zbërthejmë në shumëzues duke shfrytëzuar formulën ndryshimi i kubeve, pra kemi $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Ky prodhim është zero nëse të paktën njëri prej shumëzuesve është zero, d.m.th., $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. ose $x^2 + x + 1 = 0$. Domethënë, e fitojmë bashkësinë e barazimeve, prej ku prej barazimit të dhënë fitohet $x_1 = 1$, kurse zgjidhje e barazimit të dytë janë $\diamond$.

Në këtë mënyrë kemi mënyrë për zgjidhjen e barazimeve të llojit . Parashtrohet pyetja se si ta zgjidhim barazimin e llojit . Nëse . Me ndihmën e zëvendësimit , barazimi bëhet barazim i llojit .

Detyra 1. Zgjidhe barazimin .

Zgjidhje. Me ndihmën e zëvendësimit fitohet barazimi d.m.th., . Në mënyrë analoge të zgjidhjes prej shembullit 1 kemi: , pra me kthimin te zëvendësimi

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, x_{2,3} = \left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

fitohen zgjidhjet

Duke pasur parasysh mund t'i zgjidhim të gjitha barazimet e llojit . Nëse paraprakisht

$$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0.$$

shkruajmë se $\diamond$

Barazimi i llojit për dhe quhet **barazim binomial** prej fuqisë n dhe

$$x = y^n \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

atë me zëvendësimin sillet në barazimin e llojit $y^n - 1 = 0$. Këtu do të ndalemi vetëm te ato barazime ana e majtë e të cilit mund të shkruhet si prodhim të shumëzuesve linearë dhe katror.

Detyra 2. Zgjidhi barazimet: a), b).
Zgjidhje. a) Me zëvendësimin $a) \ 3x^4 - 2 = 0,$ fitohet barazimi $b) \ 2x^4 + 7 = 0.$

por pas zbërthimit të shumëzuesve
 fitohet bashkësia

$$\begin{cases} y-1=0 \\ y+1=0 \\ y^2+1=0 \end{cases} \text{ t.e. } y_1=1, y_2=-1, y_{3,4}=\pm i.$$

$$x_1=\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \ x_2=-\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \ x_{3,4}=\pm i\sqrt[4]{\frac{2}{3}},$$

Me kthimin e zëvendësimit fitohet

b) Me zëvendësimin fitohet barazimi tani për ta zbërthyer në shumëzues anën e majtë e plotësojmë deri në të plotë katror dhe kemi . Kjo do të thotë se duhet t'i gjejmë të gjitha zgjidhjet e bashkësisë . Zgjidhet e këtyre barazimeve janë , kurse me kthimin në zëvendësimin fitohet dhe . ♦

Zgjidhja e disa barazimeve trinome

Barazimet e formës për dhe quhen barazime trinome dhe me zëvendësimin sillet në barazim katror. Prej këtyre barazimeve këtu do të ndalemi te ato te të cilat barazimet mund t'i zgjidhim me zbërthim të prodhimit prej shumëzuesve linearë dhe katror.

Shembulli 2. Barazimi me zëvendësimin sillet në barazimin d.m.th., , prej ku fitohet se , pra tani duhet t'i zgjidhim barazimet dhe . Në mënyrë analoge detyrat paraprahe kemi: dhe d.m.th., . ♦

Barazime të llojit katror

Barazimet e llojit për dhe , quhen **barazime të llojit katror** dhe me zëvendësimin transformohen në barazime katrore. Poashtu është shprehje e cila varet prej të panjohurës.

Shembulli 3. Barazimi $(x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2 = 0$ me zëvendësimin $x^2 + x + 1 = y$ transformohet $y^2 - 3y + 2 = 0$ te zgjidhjet e të cilit janë $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$.

Me kthimin te zëvendësimi fitohet $x^2 + x + 1 = 1$ t.e. $x^2 + x = 0$ zgjidhjet e të cilit janë $x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ dhe $x_4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Barazime simetrike prej shkallës së tretë dhe të katërt

Barazimi i llojit , për dhe quhet **barazim simetrik i shkallës së tretë**.

Shembulli 3. Barazimi është barazim simetrik i shkallës së tretë dhe me zbërthim të anës së majtë fitohet

$$5x^3 + 2x^2 + 2x + 5 = 5(x^3 + 1) + 2x(x + 1) = 5(x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1) =$$

$$= (x + 1)(5x^2 - 5x + 5 + 2x) = (x + 1)(5x^2 - 3x + 5) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ 5x^2 - 3x + 5 = 0 \end{array} \right. \text{ prej ku fitohen zgjidhjet } x_1 = -1, x_{2,3} = \frac{3 \pm i\sqrt{91}}{10}.$$

d.m.th., prej ku fitohen zgjidhjet

Barazimi i llojit , për dhe quhet **barazim simetrik i shkallës së katërt**. Mënyra për zgjidhjen realizohet në dy hapa. Te barazimi i parë barazimi pjesëtohet me dhe barazimi e ka formën por pastaj vendohet zëvendësimi , pra në këtë mënyrë fitohet barazimi d.m.th.,

Detyra 3. Zgjidhi barazimet:

a), b).

Zgjidhje. a). Nëse e përcjellim mënyrën dhe së pari pjesëtojmë me do të fitohet barazimi , kurse me zëvendësimin e kemi barazimin d.m.th., . Barazimi katror i fundit ka zgjidhje të cilat janë numra kompleks, pra themi se barazimi nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave realë, d.m.th., fitojmë barazim me koeficient kompleks

b). Në mënyrë analoge me a) fitohen zgjidhjet të cilat janë . Me kthimin te

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = 1 \\ x + \frac{1}{x} = -2 \end{array} \right. \text{ t.e. } \left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{array} \right.$$

zëvendësimi fitohet prej ku fitohen zgjidhjet

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \text{ e } x_3 = x_4 = -1.$$

Detyra

1. Zgjidhi barazimet: a) b) c) ç) d) dh)
- a) $x^3 - 64 = 0$, b) $x^4 - 81 = 0$, B) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$,
- r) $(x^2 + 5x + 8)^2 - 6(x^2 + 5x + 8) + 8 = 0$, D) $3x^3 + x^2 - x - 3 = 0$,
- r) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

5.3. Barazime iracionale

Koncepti për barazim iracional

T'i shqyrtojmë barazimet e formës

$$\sqrt{x+2} = 1, \sqrt[3]{x+3} - 1 = \sqrt{3x+1}, \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \sqrt{3x+2} = 0$$

Parashtrohet pyetja cilën veti të përbashkët e kanë barazimet e dhëna? Përveç kësaj ato janë barazime me një të panjohur, të gjitha ato përmbajnë funksione iracionale në lidhje me të panjohurën, përkatësisht në të gjitha ato barazime e panjohura x përmbahet nën shenjën për rrënjëzim.

Barazimet të cilat e përmbajnë nën shenjën për rrënjëzim quhen **barazime iracionale**.

Shembulli 1. Barazimet

$$\sqrt{x+2} - 1 = \sqrt{x^2 - 2}, \sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x^3 - x + 2} = 2x + 1, \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x^2 - 2} = \frac{x}{2}$$

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+2} = 4, \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}} \sqrt{9-\frac{2}{x}}$$

janë shembuj të barazimeve iracionale. ♦

Zgjidhja e barazimeve iracionale me fuqizim

Llojllojshmëria e madhe e barazimeve iracionale pamundësojnë paraqitjen e tyre në formën e përgjithshme. Për këtë nuk jemi në gjendje të gjejmë algoritëm universal për zgjidhjen e tyre. Por megjithatë në bazë të mënyrës për zgjidhje të një barazimi iracional është operacioni fuqizim. Shqyrtimi ynë do të jetë orientuar në shqyrtimin e disa llojeve të barazimeve iracionale të cilat sillen në barazime katrore ose lineare.

Detyra 1. Zgjidhe barazimin iracional

Zgjidhje. Barazimi i dhënë iracional është ekuivalent me barazimin

Me kuadrimin e të dy anëve të barazimit e fitojmë barazimin katror
rrënjët e të cilit janë dhe

Tani parashtrohet pyetja: Çfarë lidhje ekziston ndërmjet rrënjëve të barazimit të fituar katror dhe rrënjëve të barazimit të dhënë iracional? Pasi

$$6^2 + 6 + 1 > 0 \text{ и } 1^2 + 1 + 7 > 0,$$

mund të përfundojmë se të dy rrënjët e fituara të barazimit katror janë në bashkësinë e përkufizimit të barazimit iracional, përkatësisht për çdonjërin prej tyre shprehjet e barazimi kanë kuptim. Me zëvendësim për të dy vlerat e rrënjëve të barazimi iracional fitojmë një barazim numerik të vërtetë

dhe një barazim numerik të pavërtetë

prej ku mund të përfundojmë se vetëm njëri prej rrënjëve të barazimit katror është rrënjë dhe e barazimit iracional. ♦

Gjatë kuadrimin të një barazimi iracional barazimi katror i fituar ka bashkësi të gjerë të përkufizimit. Çdo rrënjë e barazimit katror nuk është rrënjë e barazimit iracional. Aq më tepër barazimi iracional nuk ka rrënjët të tjera të ndryshme prej rrënjëve të barazimit katror. Për ato shkaqe është e domosdoshme të kontrollojmë cilat prej rrënjëve të barazimit katror janë rrënjë të barazimit katror. Nëse barazimi katror nuk ka zgjidhje, atëherë edhe barazimi iracional nuk ka zgjidhje

Detyra 2. Zgjidhe barazimin iracional

Zgjidhje. Me kuadrimin e të dy anëve të barazimit e fitojmë barazimin linear zgjidhja e të cilit është

Zgjidhja e fituar e barazimit linear nuk është zgjidhje e barazimit iracional pasi

Prandaj, barazimi i dhënë nuk ka zgjidhje. ♦

Deri te përfundimi se barazimi i dhënë të shembulli i fundit nuk ka zgjidhje mund të vimë nëse vërejmë se ana e majtë e barazimit është numër real pozitiv për çdo vlerë të lejuar të panjohurës, ndërsa ana e djathtë është numër negativ. Domethënë, për çdo vlerë të lejuar të panjohurës barazimi kalon në barazim të pavërtetë numerik.

Detyra 3. Zgjidhe barazimin iracional

$$\sqrt{2x-15} - \sqrt{x+16} = -1.$$

Zgjidhje. Barazimi i dhënë iracional është ekuivalent me barazimin

$$\sqrt{2x-15} = \sqrt{x+16} - 1.$$

Me kuadrimin e të dy anëve të barazimit e fitojmë barazimin

$$2x-15 = x + -2\sqrt{x+16} + 1,$$

i cili është ekuivalent me barazimin

$$2x-15 = x + -2\sqrt{x+16} + 1,$$

Me kuadrimin e barazimit të fituar e fitojmë barazimin katror

rrënjët e të cilit janë dhe

Me kontrollin përfundojmë se barazimi i dhënë iracional ka vetëm një rrënjë ♦

Te barazimet të të cilat e panjohura është nën shenjën për rrënjë kubike nuk paraqiten probleme me fushën e përkufizimit si te barazimet të të cilat e panjohura është nën rrënjën katrore, pasi në atë rast barazimi ka kuptim edhe për vlerat negative të madhësive nënrrënjësore.

Detyra 4. Zgjidhe barazimin iracional

$$\sqrt[3]{15+2x} + \sqrt[3]{13-2x} = 4.$$

Zgjidhje. Duke i ngritur në kub të dy anët e barazimit fitojmë barazim ekuivalent me atë barazim

i cili më tej është ekuivalente me barazimin

përkatesisht me barazimin

Përsëri, duke i ngritur në kub të dy anët e barazimit fitojmë ekuivalent të tij barazim katror rrënjët e të cilit janë dhe . Rrënjët e fituara janë rrënjë edhe të barazimit iracional. ♦

Detyra 5. Zgjidhe barazimin iracional

Zgjidhje. Me kuadrimin e të dy anëve të barazimit fitojmë

prej ku vijon se sipas kësaj, barazimi ka zgjidhje për çdo numër real a dhe për çdo numër real $b \neq 0$. ♦

Detyra

1. Cilat prej këtyre barazimeve sipas x janë iracionale:

a) $x\sqrt{2} - 7x = 1$;

b) $\sqrt[3]{x} + x + \sqrt{x} = 2$;

a) b) c) ç) B) $x^2 - 5x\sqrt{a} = 0$;

r) $2\sqrt{x-7} = 1 - \sqrt{x-1}$?

2. A janë ekuivalente këto barazime: a)

a) $\sqrt{5x+1} = \sqrt{x-1}$ и $5x+1 = (x-1)^2$;

b) $\sqrt{x-2} = 3$ и $x-2 = 9$.

B) $\sqrt[3]{x^3-7} = x-1$ и $x^3-7 = (x-1)^3$;

r) $-\sqrt{x^2-2} = x$ и $x^2-2 = x^2$?

3. Cakto bashkësinë e zgjidhjeve të këtyre barazimeve iracionale: a) b) c) ç)

a) $\sqrt{x-1} = 0$;

b) $3 + \sqrt{x-2} = 4$;

B) $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$;

r) $\sqrt{2x^2-5x-3} = x+1$;

д) $\sqrt[3]{(4x+9)^2} = 9$;

г) $\sqrt[3]{x^2-x+1} = \frac{1}{2}$.

4. Zgjidhi këto barazime iracionale: a) b) c)

a) $\sqrt{5+\sqrt{3+x}} = 3$;

b) $\sqrt{16+\sqrt{x+4}} = 5$;

B) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}} = 3$.

5. Gjeji rrënjët e këtyre barazimeve iracionale: a) b) c) ç)

a) $\sqrt{2x-9} = \sqrt{6-x}$;

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$;

B) $\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+x} = 0$;

r) $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-2}} = \frac{\sqrt{3x-5}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}}$.

6. Pa e zgjidhur sqaro pse nuk kanë zgjidhje këto barazime: a) b) c)

a) $\sqrt{x+5} = -10$;

b) $\sqrt{7} + \sqrt{x-1} = 0$;

B) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+3} = -1$;

r) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1} = 1$.

5.4. Zgjidhja e barazimeve iracionale me metodën e zëvendësimit të ndryshore

Detyra 1. Zgjidhe barazimin

$$\frac{x}{1-x} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x}} = 1.$$

Zgjidhje. Futim zëvendësim të ndryshore

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} = y.$$

Me kuadrim fitojmë

$$\frac{x}{1-x} = y^2.$$

Në atë rast barazimi i dhënë fiton formën

$$y^2 - \frac{3}{2}y - 1 = 0$$

përkatësisht

$$2y^2 - 3y - 2 = 0$$

që paraqet barazim katror sipas ndryshore y , zgjidhjet e të cilit janë

$$y_1 = -\frac{1}{2} \text{ } \text{H} \text{ } y_2 = 2.$$

Në pajtim me zëvendësimin e futur kemi se y është jonegativ, që do të thotë se zgjidhjen duhet ta hedhim. Kështu, fitojmë se

Me kontrollin e drejtpërdrejt përfundojmë se _____ dhe _____ janë zgjidhje të barazimit të dhënë. ♦

Detyra 2. Zgjidhe barazimin

Zgjidhje. Futim zëvendësimin e ndryshore

Me kuadrim fitojmë

Në atë rast barazimi i dhënë e ka formën

përkatësisht

që paraqet barazim katror sipas ndryshore y , zgjidhjet e të cilit janë _____ dhe _____

Në pajtim me zëvendësimin e futur kemi se y është jonegative, që do të thotë se zgjidhjen duhet ta hedhim. Kështu, fitojmë se _____ ♦

Detyra 3. Zgjidhe barazimin

Zgjidhje. Futim zëvendësimin e ndryshore

Në atë rast barazimi i dhënë kalon në barazim racional thyesor sipas ndryshore y

e cila me zbatimin e metodës për zgjidhjen e barazimit racional thyesor sillet në barazim katror zgjidhjet e të cilit janë _____ dhe _____

Në pajtim me zëvendësimin e futur kemi se y është jonegativ, që do të thotë se zgjidhjen duhet ta hedhim. Kështu, fitojmë se _____ . ♦

Me kontrollin e drejtpërdrejt konstatohet se $x = 9$ është zgjidhje të barazimit të dhënë. ♦

Detyra 3. Zgjidhe barazimin

$$2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0.$$

Zgjidhje. Futim ndryshim të ndryshores

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = y.$$

Me kuadrim fitojmë

$$2x^2 + 3x + 9 = y^2.$$

Në atë rast ekuacioni i dhënë merr formë

$$2x^2 + 3x + 9 - 9 - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0, \text{ t.e.}$$

$$y^2 - 9 - 5y + 3 = 0$$

respektivisht

$$y^2 - 5y - 6 = 0$$

që paraqet barazim kuadrat në ndryshoren y , zgjidhjet e së cilës janë

$$y_1 = -1 \text{ и } y_2 = 6.$$

Sipas zhvendosjes së paraqitur, kemi se y është jonegativ, që do të thotë se zgjidhja $y_1 = -1$ duhet të refuzohet. Kështu, fitojmë se

Me kontroll të menjëhershëm konkludojmë se _____ dhe _____ janë zgjidhje të ekuacionit të dhënë. ♦

Detyra

Cakto bashkësinë e zgjidhjeve të këtyre barazimeve iracionale: a) b) c) ç)

1. a) $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} = 0;$

6) $x^2 - x + 2\sqrt{x^2 - x - 1} = 4;$

2. a) $\frac{3}{\sqrt{x+1}+1} + 2\sqrt{x+1} = 5;$

6) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{6}.$

1. a) b)

2. a) b)

Zgjidhi këto barazime iracionale: a) b) c) ç)

3. a) $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2;$

6) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{3}{2};$

4. $3\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} - \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2;$

5. $\sqrt{\frac{x+4}{1-2x}} - \sqrt{\frac{1-2x}{x+4}} = 1.$

3. a) b)

5.5. Sistemi prej barazimit linear dhe katror me dy të panjohura

Barazimi të cilin të paktën njëri prej të dy shprehjeve përmban dy të panjohura quhet **barazim me dy të panjohura**.

Barazimi polinom me dy të panjohura të cilat janë të shkallës së parë quhet barazim i shkallës së parë me dy të panjohura **barazim linear me dy të panjohura**. Barazimi me dy të panjohura të cilat janë të shkallës së dytë me dy të panjohura ose **barazim katror me dy të panjohura**.

Shembulli 1. a) Barazimet
 $x - 3y = 4$, $2x^4 - 3y + 3 = y^3$, $x^2 - 2xy + 3x + 2y - 3 = 0$, $\sqrt{x+2} - y = 3$

janë shembuj të barazimeve lineare me dy të panjohura.

b) Barazimet $2x - 3y = 4$, $2x = 3y$, $7 - y = 4x$, $x - y - 4 = 0$

janë shembuj të barazimeve lineare me dy të panjohura.

c) Barazimet $2x^2 + xy + y^2 - x + 3y - 1 = 0$, $2xy + y^2 = 0$, $x^2 - 2y^2 = 0$, $xy = 0$

janë barazime katrore me dy të panjohura. ♦

Zgjidhja e barazimit me dy të panjohura është çdo çift i renditur prej vlerave të të panjohurave prej bashkësisë së përkufizimit për të cilën barazimi kalon në barazim të saktë numerik.

Shembulli 2. Çiftet e renditura janë zgjidhjet e barazimit . Ndërsa çiftet e renditura (0,0), (1,0), (1,1). Nuk janë zgjidhje të tij. ♦

Çdo barazim me dy të panjohura mund të sillet në formën

Shembulli 3. Barazimet dhe janë ekuivalent. Të atillë janë edhe barazimet ♦

• Nëse të dy anët e barazimit të dhënë shumëzohen me një shprehje të njëjtë, që për të gjitha vlerat e të panjohurës është përkufizuar dhe e ndryshme prej zeros, do të fitohet barazim i ri ekuivalent me barazimin e dhënë.

Shembulli 4. a). Nëse të dy anët e barazimit i pjesëtojmë me (ose i shumëzojmë me) fitojmë barazim ekuivalent

$$\frac{2x - 7xy}{3} = \frac{x^2 + y}{2} - 5$$

b). Nëse të dy anët e barazimit i shumëzojmë me SHVP të emëruesve, përkatësisht me numrin 6, do të fitojmë barazim ekuivalent me barazimin e dhënë

$$4x - 14xy = 3x^2 + 3y - 30. \quad \blacklozenge$$

Çdo barazim me dy të panjohura mund të sillet në formën

$$ax + by + c = 0$$

të quajtur **lloj i përgjithshëm i barazimit me dy të panjohura**, ku a, b dhe c janë numra realë ose shprehje që nuk varen prej të panjohurës x , të quajtur koeficienti i barazimit.

Barazimi katror me dy të panjohura është ekuivalent me barazimin e llojit $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

të quajtur **lloj i përgjithshëm i barazimit katror me dy të panjohura**, ku a, b, c, d, e dhe f janë numra realë ose shprehje që nuk varen prej të panjohurës x , të quajtur koeficient të barazimit.

$$x - 3y - 4 = 0, \quad 2x - y + 1 = 0, \quad x - \frac{2}{3}y + \sqrt{3} = 0$$

Shembulli 5. a) Barazimet

janë barazime lineare me dy të panjohura të llojit të përgjithshëm.

b) Barazimet $2x^2 + xy + y^2 - x + 3y - 1 = 0, \quad 2xy + y^2 = 0, \quad x^2 - 2y^2 = 0, \quad xy = 0$

barazime katrore me dy të panjohura të llojit të përgjithshëm. ♦

Bashkësia prej barazimeve me dy të panjohura të njëjta quhet **sistem i barazimeve me dy të panjohura**. **Zgjidhje** e sistemit të barazimeve me dy të panjohura është çdo çift i renditur i vlerave të panjohurave që është zgjidhje e çdo barazimi të sistemit. Të zgjidhet sistemi i barazimeve të dhëna me dy të panjohura do të thotë të caktohet bashkësia prej të gjitha zgjidhjeve të tij. Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të barazimeve të dhëna me dy të panjohura përbëhet prej zgjidhjeve të përbashkëta prej barazimeve të sistemit.

Dy sisteme të barazimeve me dy të panjohura janë **ekuivalent** nëse kanë bashkësi të zgjidhjeve të barabarta. Nëse njërin prej barazimeve në sistem e zëvendësojmë me barazimin ekuivalent me atë fitojmë sistem ekuivalent me të dhënin.

Zgjidhja e sistemit të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura

Sistemi prej dy barazimeve prej të cilëve njëri është barazim linear me dy të panjohura quhet **sistem i barazimit linear dhe katror me dy të panjohura**. Për shkak të teoremave të barazimeve ekuivalente, çdo sistem i barazimit linear dhe katror me dy të panjohur është ekuivalent me sistemin e llojit

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 3 \\ \frac{1}{9}x^2 = 1 - \frac{1}{9}y^2 \end{cases}$$

Shembulli 6. Sistemi

është sistem i barazimit linear dhe katror me dy të panjohura. Ai është ekuivalent me sistemin

$$\begin{cases} x - 3y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Çifti i renditur $(0, -3)$ është zgjidhje e sistemit të dhënë, ndërsa çifti i renditur $(3, 0)$. Nuk është zgjidhje e tij. Me të vërtetë, kemi se

$$\begin{cases} 0 + 3 \cdot (-3) - 9 = 0 \\ 0^2 + (-3)^2 - 9 = 0 \end{cases} \text{ HO } \begin{cases} 3^2 + 0^2 - 9 = 0 \\ 3 - 3 \cdot 0 - 9 \neq 0 \end{cases} \quad \blacklozenge$$

Për shkak të teoremave për barazime ekuivalente, çdo sistem i barazimit linear dhe katror me dy të panjohura është ekuivalent me sistemin e llojit

$$\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

të quajtur forma e përgjithshme e sistemit të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura me koeficientë m, n, p, a, b, c, d, e dhe f .

Nëse te barazimi i parë e shprehim njërën të panjohur nëpërmjet tjetrës, për shembull

$$x = -\frac{p + ny}{m},$$

dhe kështu shprehjen e fituar për x e zëvendësojmë te barazimi i dytë dhe e fitojmë sistemin

$$\begin{cases} x = -\frac{p + ny}{m} \\ a\left(-\frac{p + ny}{m}\right)^2 + b\left(-\frac{p + ny}{m}\right)y + cy^2 + d\left(-\frac{p + ny}{m}\right) + ey + f = 0 \end{cases}$$

Sistemi i sipërm është ekuivalent me sistemin e dhënë, pasi është fituar me zbatimin e transformimeve ekuivalente. Zgjidhjet e fituara sipas y te barazimi i dytë i sistemit i zëvendësojmë te barazimi i parë i sistemit. Në këtë mënyrë i fitojmë zgjidhjet përkatëse sipas x . Ta ilustrojmë me shembull metodën për zgjidhjen e sistemit të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura.

Detyra 1. Zgjidhe sistemin e barazimit linear dhe katror me dy të panjohura:

Zgjidhje. Prej barazimit të parë të sistemit fitojmë $x = -\frac{5 - 5i}{5} = -1 + i$. Duke zëvendësuar shprehjen e fituar për x te barazimi i dytë i sistemit e fitojmë barazimin $(5 - 5i)(-1 + i) + (-1 + i)^2 + (-1 + i)^2 = 0$ i cili është ekuivalent me barazimin katror $(5 - 5i)(-1 + i) + (-1 + i)^2 = 0$ rrënjët e të cilit janë $-1 + i$ dhe $-1 - i$.

Duke zëvendësuar vlerat e fituara për y i fitojmë vlerat përkatëse për x :

dhe
Sipas kësaj, zgjidhjet e sistemit të dhënë janë çifte të renditura $(5 - 5i, 5 + 5i)$ и $(5 + 5i, 5 - 5i)$.

$$\begin{cases} 5 - 5i + 5 + 5i = 10 \\ (5 - 5i)^2 + (5 + 5i)^2 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 5 + 5i + 5 - 5i = 10 \\ (5 + 5i)^2 + (5 - 5i)^2 = 0 \end{cases}$$

Kontrolli:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

Detyra 2. Zgjidhe sistemin e barazimit linear dhe katror me dy të panjohura:

Zgjidhje. Sistemi ka pakufi shumë zgjidhje. ♦

Detyra 3. Zgjidhe sistemin e barazimit linear dhe katror me dy të panjohura:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ 5x^2 + 2xy - y^2 + 3x - 2y - 11 = 0 \end{cases}$$

$$x = -\frac{3y+5}{2}.$$

Zgjidhje. Prej barazimit të parë të sistemit fitojmë

Me zëvendësimin e shprehjes së fituar për x te barazimi i dytë e fitojmë barazimin:

$$5\left(-\frac{3y+5}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{3y+5}{2}\right)y - y^2 + 3\left(-\frac{3y+5}{2}\right) - 2y - 11 = 0$$

i cili është ekuivalent me barazimin katror

rrënjët e të cilit janë dhe . Duke zëvendësuar vlerat e fituara për y i fitojmë

vlerat përkatëse për x : dhe

Prandaj, zgjidhje të sistemit të dhënë janë çiftet e renditura dhe

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 5 = 0 \\ 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-3) - (-3)^2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 11 = 0 \end{cases}$$

Kontrolli:

dhe

$$\begin{cases} 2 \cdot \left(-\frac{91}{58}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) + 5 = 0 \\ 5 \cdot \left(-\frac{91}{58}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{91}{58}\right) \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) - \left(-\frac{17}{29}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{91}{58}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) - 11 = 0 \end{cases}$$

♦

Detyra

1. Cilat prej këtyre sistemeve është sistem i barazimit linear dhe katror me dy të panjohura a) b)

c) d) dh)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x = y \\ y^2 + xy = 4y \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} y = 3x - 2 \\ x^2 + xy - 3 = y^2 \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + xy^2 = 4 \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} 3x + 2z = 7 \\ x^2z + 3z^2 = 6 \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 0 \\ x^2 + \sqrt{3}y^2 = 2x - y \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} \sqrt{x} + y = 0 \\ x^2 = -\sqrt{5}y^2 \end{cases} \end{array}$$

2. Të transformohet në formën e përgjithshme të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura: a) b) c) d) dh)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x = 1 - y \\ 3x^2 + y^2 = 4 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \frac{3}{4}y = \frac{1}{2}x - 12 \\ x^2 + \sqrt{2}xy = y^2 + \frac{1}{2} \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1}{2}x^2 + xy + 3y^2 = 1 - x \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} y = 10 + x \\ (x-1)^2 + 2(y-3)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} \frac{1}{2}x = -\sqrt{3}y \\ x^2 + 3y = 0 \end{cases} & \end{array}$$

3. Caktoji koeficientët e sistemit të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura: a) b)

$$\text{a) } \begin{cases} 3x+1=y \\ 3x^2+xy+y^2+x-1=y \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{3}y=x-12 \\ x^2+\sqrt{2}xy=3y^2+4 \end{cases};$$

4. Çifti i renditur $(1, -2)$ a është zgjidhje e sistemit të barazimit linear dhe katror me dy të

$$\text{a) } \begin{cases} 4x=2-y \\ x^2+3xy+3y^2=7 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} y=2x \\ x^2+\frac{1}{2}xy+5y^2-3=0 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases};$$

panjohura: a) b) c)

5. Cili prej këtyre çifteve të renditura është zgjidhje e sistemit të barazimit linear dhe katror me

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (x-1)^2+xy+y^2+3y=5 \end{cases}; \quad \text{a) } \quad \text{b) } \quad \text{c) } \quad \text{ç) }$$

$$\text{a) } (0,1); \quad \text{b) } \left(3, \frac{1}{2}\right); \quad \text{c) } (6,-5); \quad \text{ç) } (1, -\sqrt{2}).$$

6. Zgjidhe sistemin e barazimit linear dhe katror me dy të panjohura:

$$\text{a) } \begin{cases} x=8-y \\ xy=15 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} y=3x \\ x^2+y^2=90 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} 2(x-3)=6(x-y) \\ xy=4 \end{cases};$$

$$\text{d) } \begin{cases} x+y=3 \\ 3x^2-2y^2=10 \end{cases}; \quad \text{e) } \begin{cases} 3x-2y-12=0 \\ x^2+y^2-14x-4y=0 \end{cases};$$

a) b) c) ç) d)

7. Cilat prej këtyre sistemeve kanë zgjidhje reale, kurse cilët kanë zgjidhje komplekse të konjuguara?

a) b) c) ç) d) dh)

$$\text{a) } \begin{cases} x=2y \\ x^2+y^2=10 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} y=x-2 \\ x^2-y=0 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} y=x-3 \\ x^2+y^2=1 \end{cases};$$

$$\text{d) } \begin{cases} x+4y=1 \\ 2x^2+xy+\frac{1}{3}y^2=1-x \end{cases}; \quad \text{e) } \begin{cases} y=3x+1 \\ 2(x-2)^2+\frac{1}{3}(y-3)^2=-1 \end{cases}; \quad \text{f) } \begin{cases} x=1+y \\ 3xy=0 \end{cases};$$

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Zgjidhi këto barazime bikatore: a) b)

$$\text{a) } x^4-10x^2+9=0; \quad \text{b) } x^4-3x^2-4=0.$$

2. Gjeji rrënjët e këtyre barazimeve bikatore: a) b)

$$\text{a) } x^4-13x^2+36=0; \quad \text{b) } x^4-7x^2+12=0.$$

3. Gjeje bashkësinë e zgjidhjeve të këtyre barazimeve bikatore: a) b)

$$\text{a) } x^4-17x^2+16=0; \quad \text{b) } x^4-32x^2+369=0.$$

$$\text{a) } \frac{y^4-3y^2-4}{y^2+1}; \quad \text{b) } \frac{x^4-x^2-20}{x^4+3x^2-4}.$$

4. Thjeshtoji thyestat a) b)

5. Zgjidhi këto barazime iracionale: a) b)

a) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4;$ b) $\sqrt{3x-1} + \frac{2}{\sqrt{3x-1}} = \sqrt{5x+3}.$

6. Gjeji rrënjët e këtyre barazimeve iracionale: a) b)

a) $\sqrt{\frac{2x+3}{x-2}} - 3\sqrt{\frac{x-2}{2x+3}} = 2;$ b) $\sqrt[3]{25 + \sqrt{x^2 + 3}} = 3.$

7. Sqaro pse këto barazime nuk kanë zgjidhje: a) b) c) ç) d) dh)

a) $\sqrt{2x-1} = -5;$ b) $\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} = -1;$ c) $\sqrt{1+y} + \sqrt{2+y} = 0;$

d) $\sqrt{x-6} + \sqrt{5-x} = 3;$ e) $\sqrt{y} = 1 + \sqrt{-1-y};$ f) $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^2-4} = 1.$

8. Zgjidhi këto sisteme të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura: a) b)

a) $\begin{cases} 2x-1=y \\ 3x^2=4-y^2 \end{cases};$ b) $\begin{cases} \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}y - 12 \\ x^2 + \frac{1}{2} = y^2 - \sqrt{2}xy \end{cases};$

9. Gjeji zgjidhjet e këtyre sistemeve të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura: a) b)

a) $\begin{cases} x+4=z \\ x^2+2z-x=-3z+\frac{1}{2} \end{cases};$ b) $\begin{cases} y=3x \\ x^2+y^2=90 \end{cases}.$

10. Gjeji zgjidhjet e këtyre sistemeve të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura: a) b)

a) $\begin{cases} 2(x-3)=6(x-y) \\ xy=4 \end{cases};$ b) $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2+2y^2=3 \end{cases}.$

6. FUNKSIONI KATORR, PABARAZIMI KATORR, SISTEMI DHE BASHKËSIA E PABARAZIMEVE KATRORE ME NJË TË PANJOHUR

6.1. Koncepti për funksion katror. Grafiku i funksionit katror

Funksioni real

Le të jenë E dhe F dy nënbashkësi jo të zbrazëta të bashkësisë së numrave realë. Nëse sipas ndonjë rregulle çdo numri real $x \in E$ i shoqërohet numër real i vetëm $y \in F$ themi se është dhënë **funksioni real**, shkurtimisht **funksion** i bashkësisë E me vlerat në bashkësinë F . Funksionet i shënojmë me shkronja të vogla latine, për shembull $f, g, h, \dots$

Bashkësia E quhet **bashkësi e vlerave të lejuara** për x ose **fushë e përkufizimit** të funksionit f dhe shënohet me D_f . Nënbashkësia $\{f(x) | x \in E\}$ prej bashkësisë F quhet **bashkësi e vlerave** të funksionit f dhe shënohet me V_f .

Funksioni katror

Funksioni i formës $f(x) = ax^2 + bx + c$ ku a, b dhe c janë numra realë, $a \neq 0$ dhe x është ndryshore e pavarur ose argument quhet **funksion katror**. Parametri a quhet **koeficienti para x^2** ose **koeficienti i parë**, parametri b quhet **koeficient i dytë** ose **i mesëm**, kurse parametri c është **anëtar i lirë** ose koeficienti **i tretë** i funksionit katror.

Fusha e përkufizimit të funksionit katror $\mathbb{R}$ (është e gjithë bashkësia e numrave realë, përkatësisht $\mathbb{R}$).

Shembulli 1. a) Funksioni $f(x) = -2x^2 + 3$ është katror me koeficientët $a = -2$, $b = 0$ dhe $c = 3$.

b) Koeficienti i funksionit katror $f(x) = -2x^2 + 3$ është $a = -2$, $b = 0$ dhe $c = 3$.

c) Funksioni $f(x) = -2x^2 + 3$ është katror me koeficientët $a = -2$, $b = 0$ dhe $c = 3$.

ç) Funksioni katror $f_1(x) = \frac{1}{x} + 4$, $f_2(x) = x - \frac{1}{2}$, $f_3(x) = \sqrt{x} + 3$ i ka koeficientët $a = 0$, $b = 0$ dhe $c = 0$.

Grafiku i funksionit katror

Nëse $f: E \rightarrow F$ është funksion atëherë bashkësia $G_f = \{(x, f(x)) | x \in E\}$, e cila shqyrtohet edhe si nënbashkësi prej pikave në rrafshin koordinativ, quhet **grafik** i funksionit f . Për funksionin f themi se është dhënë **grafikisht** nëse për çdo element $(x, f(x))$ prej grafikut është dhënë pika $P(x, f(x))$. Në rrafshin koordinativ.

Grafiku i funksionit $f(x) = ax^2$.

Shembulli 1. Pasi për çdo numër real x , ekziston y vijon se funksioni është përkufizuar në gjithë drejtëzën reale. Do të konstruktojmë disa pika prej grafikut të tij, duke njehsuar paraprakisht koordinatat e tyre vlerat e të cilave do t'i paraqesim në tabelë:

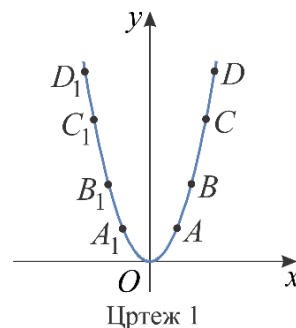
x	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
$f(x)$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4
точки	D_1	C_1	B_1	A_1	O	A	B	C	D

Të vërejmë se pikat e konstruktura nuk shtrihen në drejtëz (vizatimi 1).

Pika $O(0,0)$ është pika prej grafikut të funksionit. Më tej, pikat A , B , C dhe D shtrihen në kuadrantin I. Sikurse që zmadhohen abshisat e tyre, ashtu me radhë zmadhohen edhe ordinatat e tyre. Por Poashtu, nëse japim çfarëdo vlere ndryshores x (për shembull $x = 3, 4, \dots, 10, \dots$) do të vërejmë se vlerat e funksionit zmadhohen „shumë shpejt“ prej vlerave përkatëse të argumentit. Pikat shtrihen në $A_1B_1C_1D_1$ kuadrantin II.

Ato janë simetrike me pikat A, B, C dhe D në lidhje me boshtin y .

Me lidhje të vijueshme të pikave të zgjedhura, e fitojmë grafikun e funksionit që nuk është drejtëz ♦ Vizatimi 1

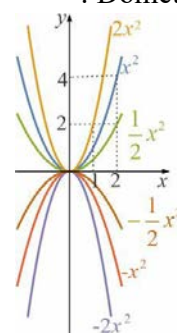


Le të jetë a numër real, i ndryshueshëm prej 0. Pika me koordinata $(1, a)$ takojnë grafikun Shembulli 1), ndërsa pika me koordinata $(-1, a)$ i takon grafikut të funksionit $f(x) = -ax^2$. Domethënë, grafikun e funksionit mund ta fitojmë me shumëzimin e ordinatave të pikave prej grafikut të $f(x) = ax^2$ me numrin real a .

Të vërejmë se nëse $a < 0$, grafikun i

Shembulli 2. Te vizatimi djathtas, në sistemin e njëjtë koordinativ, janë paraqitur grafikët e këtyre funksioneve:

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = 2x^2, \quad f_3(x) = \frac{1}{2}x^2,$$



$$f_4(x) = -x^2, \quad f_5(x) = -2x^2, \quad f_6(x) = -\frac{1}{2}x^2. \quad \blacklozenge$$

Vërejmë se për $x=0$ vlen $y=0$, po për $x \neq 0$ vlen $y < 0$, për çdo numër real x . Prandaj, grafiku i funksionit është „më i gjerë“ prej grafikut të f_5 për $x \neq 0$, kurse „më i ngushtë“ për $x=0$. Në mënyrë analoge vetitë vlejné për f_6 . Nëse pika $(0,0)$ i takon grafikut të f_4 , atëherë pasi fituam se edhe pika $(0,0)$ takon grafikut të f_5 . Pikat $(-1, -1)$ dhe $(1, -1)$ janë simetrike boshtore në lidhje me boshtin s . Pasi kjo vlen për çdo numër real x vijon se grafiku i f_5 është simetrike boshtore në lidhje me boshtin y .

Grafiku i funksionit

Le të jetë $f(x) = x^2$. Nëse pika $(0,0)$ i takon grafikut të f , atëherë $f(0) = 0$ i takon grafikut të f . Pasi kjo vlen për çdo numër real x , vijon se grafiku i f mund të vizatohet me zhvendosjen e grafikut të f për $x \neq 0$. Njësi sipas boshtit y .

Shembulli 3. Te vizatimi e sistemit të njëjtë koordinativ, janë paraqitur grafikët e funksioneve

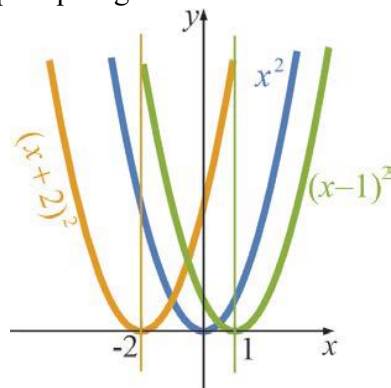
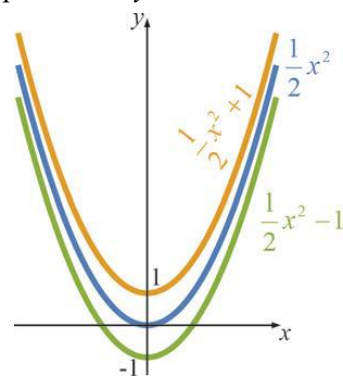
Të vërejmë se nëse $f(x) = x^2$, grafiku i funksionit është zhvendosur “poshtë” në drejtim të boshtit y , kurse është zhvendosur “lart”, Grafiku i funksionit është simetrike boshtore në lidhje me boshtin y .

Grafiku i funksionit

Le të jetë $f(x) = x^2$. Nëse pika $(0,0)$ i takon grafikut të funksionit f , atëherë $f(0) = 0$ i takon grafikut f dhe poashtu vlen $f(0) = 0$. Prandaj, grafiku i funksionit f atëherë i takon grafikut të f dhe poashtu vlen $f(0) = 0$ sipas kësaj, grafiku f fitohet me zhvendosje (translacion) të grafikut të f për $x \neq 0$. Njësi në drejtim të boshtit x . Poashtu, nëse $f(x) = x^2$ zhvendosja është majtas por nëse $f(x) = x^2$ zhvendosja është djathtas

Shembulli 4. Te vizatimi në të njëjtën sistem koordinativ, janë paraqitur grafikët e funksioneve

◆ Nëse $f(x) = x^2$ dhe vlen $f(0) = 0$



$$f(\alpha - d) = a(\alpha - d - \alpha)^2 = ad^2 = a(\alpha + d - \alpha)^2 = f(\alpha + d)$$

6. Shkruaj këto funksione katrore në formën kanonike:

- a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$; b) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$; c) $f(x) = (x-2)(x-3)$.
 d) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$; e) $f(x) = -(x - \frac{1}{4})^2$; f) $f(x) = (x+1)(x-2)$.

6.2. Disa veti të funksionit katror dhe grafikun e tij

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Le të jetë dhënë funksioni katror numër real. Vlera e funksionit në t është

Në mënyrë analoge, vlera e funksionit në $-t$ është

$$\left(-\frac{b}{2a} - t, at^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) \text{ dhe } \left(-\frac{b}{2a} + t, at^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

Prandaj, pikat

prej grafikut të funksionit katror janë simetrike në lidhje me drejtëzën

Me fjalë të tjera, grafiku i funksionit

është **boshtore simetrike** në lidhje me drejtëzën

Grafikun e çdo funksioni mund ta vizatojmë dhe me translacion të grafikëve të funksioneve katrore më të veçanta. Paraprakisht e vizatojmë grafikun e funksionit $f(x) = x^2$. Me ndihmën e tij do ta vizatojmë grafikun e çdo funksioni katror.

Vlera e ndryshores reale x për të cilën vlerë funksioni është i barabartë me zero, përkatësisht quhet **zero e funksionit**. Me fjalë të tjera, zero e funksionit katror janë rrënjët reale të barazimit katror

Të cilën do ta quajmë **barazimi katror që i përgjigjet funksionit katror**. Sikurse e kemi të njohur, barazimi katror ka zgjidhje reale nëse diskriminanta e tij është jonegative. Më saktë, kur $D > 0$, barazimi katror ka dy rrënjë reale të ndryshme, kurse në rastin $D = 0$ ka rrënjë reale të dyfishtë. Domethënë, varësisht prej diskriminantës të barazimit përkatës katror, të quajtur **diskriminanta e funksionit katror**, funksioni (mund të ketë dy zero, një zero ose kur $D < 0$, të mos ketë zero. Pikat prej grafikut të funksionit katror ku koordinata e parë është zero e funksionit shtrihen në boshtin x .

Detyra 1. Të caktohen zerot e funksioneve katrore:

- a) $f(x) = x^2 + x - 12$; b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$; c) $f(x) = x^2 + x + 12$.

Zgjidhje. a) Diskriminanta e funksionit katror _____ prej ku vijon se funksioni i dhënë katror ka dy zero reale. Ato janë rrënjë të barazimit përkatës katror _____. Prandaj, funksioni i dhënë katror ka dy zero _____ dhe _____.

b) Diskriminanta e funksionit të dhënë katror $D = 0$ prej ku vijon se funksioni i dhënë katror ka një zero reale. Ajo është rrënjë e dyfishtë e barazimit përkatës katror _____. Prandaj, funksioni i dhënë katror ka një zero $x = 2$.

c) Diskriminanta e funksionit të dhënë katror $D > 0$ prej ku vijon se funksioni i dhënë katror nuk ka zero. ♦

Posaçërisht, kemi se:

1) Barazimi katror _____ ka zero në $x = 0$ prej ku përfundojmë se grafiku i tij kalon nëpër fillimin e koordinatave.

2). Nëse koeficientët a dhe c të barazimi katror _____ kanë shenjë të njëjtë, atëherë funksioni _____ nuk ka zero, ndërsa nëse ato janë me shenja të kundërta, ai ka dy zero në

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ H } x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

3) Funksioni katror _____ ka dy zero _____ dhe _____. Grafiku i tij kalon nëpër fillimin e koordinatave.

Detyra

1. Gjej boshtin e simetrisë të grafikut të funksionit $f(x) = -2x^2 + 3x - 2$.

2. Gjeji diskriminantat e këtyre funksioneve katrore:

a) $f(x) = (x-3)^2 - \frac{3}{4}$; **b)** $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$; **c)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.

a) b) c) _____.

3. Gjeji zerot e funksioneve katrore:

a) $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$; **b)** $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$; **c)** $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

d) $f(x) = -(x-1)^2 + 9$; **e)** $f(x) = \frac{4}{3}x^2 + 4x + 1$; **f)** $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}$.

a) b) c)

d) e) f)

4. A e pret grafiku i funksionit _____ boshtin x ?

5. A ekziston funksion katror me bosht grafiku i të cilit e pret boshtin e parabollës në pikën $(3, -2)$?

6.3. Vlerat ekstreme dhe intervalet e monotonies së funksionit katror

Vlerat ekstreme të funksionit katror

Shembulli 1. Ta shqyrtojmë funksionin katror

Pasi numrat realë janë zero të funksionit të dhënë, përfundojmë se pikat dhe pikat prej grafikut të tij. Të caktojmë edhe disa pika prej grafikut të funksionit të dhënë dhe vlerat e fituara për koordinatat e tyre t'i paraqesim në tabelë:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0
точки	P	N_1			T			N_2

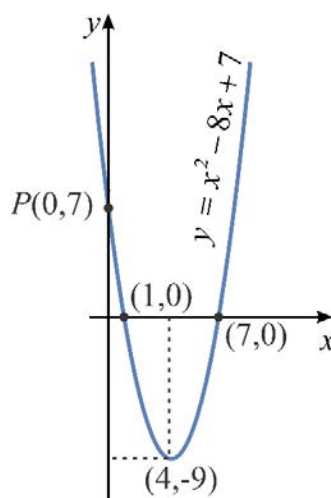
Nëse vlerat e fituara prej tabelës i interpretojmë në rrafshin koordinativ, kurse pastaj pikat e fituara në mënyrë të vijueshme i lidhim, do ta fitojmë grafikun e funksionit të dhënë katror. Të vërejmë se për $x = 4$ vlera e funksionit është më e vogël prej vlerës së funksionit për

çfarëdo tjetër vlerë të ndryshores së pavarur x . Për funksionin e dhënë themi se ka **minimum (vlera më e vogël)**. Në pikën

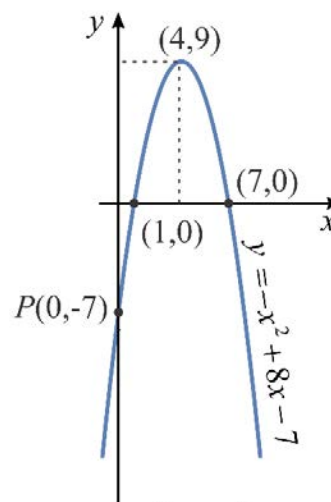
$f(x) = -x^2 + 8x - 7$, (vizatimi 2).

Nëse realizojmë diskutim analog për funksionin

do të përfundojmë se për $x = 4$ vlera e funksionit është më e madhe prej vlerës së funksionit për çfarëdo qoftë tjetër vlerë të ndryshores së pavarur x . Atëherë themi se funksioni i dhënë ka **maksimum (vlerë më të madhe)**. Në pikën (vizatimi 3).



Цртеж 2



Цртеж 3

Themi se një funksion ka **minimum** në pikën . Nëse për çdo . Atëherë koordinatat e minimumit janë . Në mënyrë analoge, themi se një funksion ka **maksimum** në pikën . Nëse për çdo dhe koordinatat e minimumit janë . Ordinatat e minimumit, përkatësisht maksimumit do t'i quajmë **vlera ekstreme** të funksionit.

Në vazhdimë do të tregojmë se çdo funksion katror ka minimum ose maksimum. Prej formës kanonike të funksionit fitojmë se

$$f(x) + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Pasi, për çdo numër real x , shenja e shprehjes varet vetë prej shenjës së koeficientit a . T'i shqyrtojmë këto dy raste:

a) Për $a > 0$ shprehja $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ është jonegative, për çdo numër real x . Poashtu, për

$x = -\frac{b}{2a}$, ai ka vlerë më të vogël e cila është e barabartë me zero. Prandaj, vlera e shprehjes ka vlerë më të vogël për dhe ajo është përkatësisht .

Domethënë, funksioni katror , për $a > 0$, ka **minimum**, i cili arrihet për b) Për $a < 0$ shprehja, për çdo numër real x , *kurse* për ka vlerë më të madhe, e barabartë me zero. Sipas kësaj, vlera e shprehjes është më e madhe për dhe

ajo është përkatësisht $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Domethënë, funksioni katror për, $a < 0$ ka **maksimum**, i cili arrihet për Pika quhet **kulmi** i funksionit të dhënë katror. Bashkësia e vlerave të funksionit katror është intervali Për dhe për $a < 0$. Kështu, te shembulli 1 bashkësia e vlerave të funksioneve janë dhe **Shembulli 2. a)** Funksioni katror për $x = 4$ ka minimum . Prandaj, kemi se . Bashkësia e vlerave është

b) Funksioni katror $f(x) = -x^2 + x + 6$, **sa** $x = \frac{1}{2}$ ka maksimum $f(x) = \frac{25}{4}$. Prandaj,

$T = T \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4} \right)$, kurse bashkësia e vlerave është $\left[-\infty, \frac{25}{4} \right)$. ♦

Veçanërisht, Kemi se

1) Barazimi katror $f(x) = ax^2$ për $a > 0$ ka minimum për $x = 0$ përkatësisht . Nëse, $a < 0$ funksioni i dhënë ka maksimum për $x = 0$ dhe $T(0,0)$

2) Barazimi katror

$$f(x) = ax^2 + c,$$

për $a > 0$ ka minimum për $x = 0$ përkatësisht maksimum për $x = 0$ dhe

. Nëse, $a < 0$ funksioni i dhënë ka

3) Funksioni katror

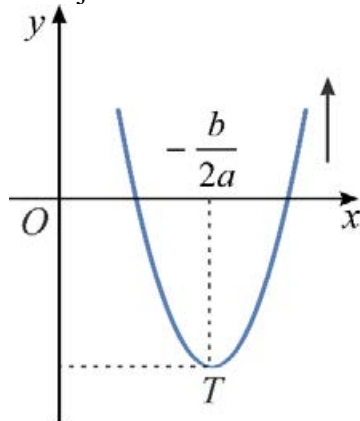
$$f(x) = ax^2 + bx,$$

për $a > 0$ ka minimum për maksimum për dhe

përkatësisht . Nëse, $a < 0$ funksioni i dhënë ka vlerë më të vogël për dhe ajo është

Intervalet e monotonisë së funksionit katror

Le të jetë dhënë funksioni katror $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.



Цртеж 4

Vizatimi 4

Nëse $a > 0$ atëherë funksioni katror zvogëlohet në intervalin (vizatimi 4).

dhe rritet në intervalin

Nëse $a < 0$, atëherë funksioni katror rritet në intervalin (vizatimi 5).

dhe zvogëlohet në intervalin

Intervalet dhe quhen **interval i monotonisë**.

Shembulli 3. a) Funksioni katror për $x = 4$ ka minimum . Prandaj, kemi se ai zvogëlohet në intervalin dhe rritet në intervalin .

b) Funksioni katror për ka maksimum . Prandaj, kemi se ai rritet në

intervalin $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ zvogëlohet në intervalin . ♦

Detyra

1. Gjej për cilën vlerë të ndryshores x , këto funksione katrore kanë minimum (përkatësisht maksimum) dhe gjeje vlerën e tij:

- a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$; b) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$; c) $f(x) = (x-2)(x-3)$.
r) $f(x) = -(x-1)^2 + 9$; d) $f(x) = \frac{4}{3}x^2 + 4x + 1$; e) $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}$.

ç) d) dh)

2. Gjeji koordinatat e kulmit të këtyre funksioneve katrore:

- a) $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$; b) $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$; c) $f(x) = (x-2)(x-3)$;
d) $f(x) = (x-3)^2 - \frac{3}{4}$; e) $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$; f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.

a) b) c)

ç) d) dh)

Str. 105

3. Gjej intervalet e monotonisë të këtyre funksioneve katrore:

- a) $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$; b) $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$; c) $f(x) = (x-2)(x-3)$;
d) $f(x) = (x-3)^2 - \frac{3}{4}$; e) $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$; f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.

ç) d) dh)

4. A ekziston funksioni katror i cili për $x = 0$ ka maksimum , por pika i takon grafikut të tij?

6.4. Shenja e funksionit katror

Në këtë pjesë do ta shqyrtojmë pyetjen për cilat vlera të ndryshores x , funksioni katror ka vlerë pozitive, përkatësisht negative. Për këtë qëllim do t'i shqyrtojmë këto tre raste:

I. Diskriminanta e funksionit katror është pozitive ($D > 0$)

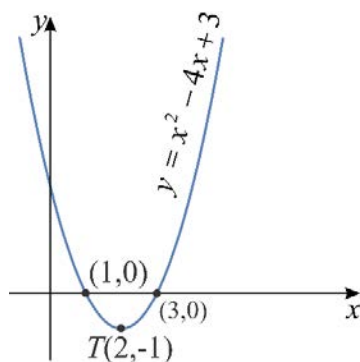
Në këtë rast, barazimi katror përkatës ka dy rrënjë reale, dhe . Atëherë funksionin katror mund ta shkruajmë sikurse

Pa humbur nga përgjithësimi mund të llogarisim se

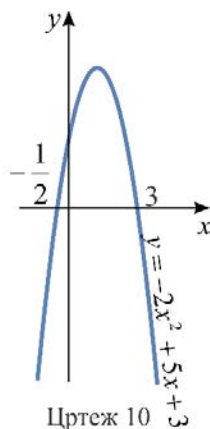
a) Le të jetë . Atëherë edhe . Pra prodhimi është pozitiv. Prandaj, shenja e katrore është e njëjtë me shenjën sikurse edhe koeficienti a . Prandaj, kur vlera e funksionit katror është pozitive për çdo , vlera e funksionit katror është negative për çdo kur , kurse është negative për çdo kur

b) Le të jetë . Atëherë prodhimi është negativ. Prandaj, shenja e është e kundërt me shenjën e koeficientit . Domethënë, nëse, , vlera e funksionit është negative për çdo kur , kurse është pozitive për çdo kur .

c) Le të jetë . Atëherë edhe , pra prodhimi është pozitiv, Prandaj, shenja e është e njëjtë me shenjën e koeficientit . Domethënë, nëse , vlera e funksionit është pozitive për çdo kur .



Цртеж 9



Цртеж 10

Shembulli 1. a) Funkzioni katror është pozitiv për çdo , por është negativ për çdo (vizatimi 9).

b) Funkzioni katror është negativ për çdo numër real , por pozitiv për (vizatimi 10). ♦

II. Diskriminanta e funksionit katror është e barabartë me zero .

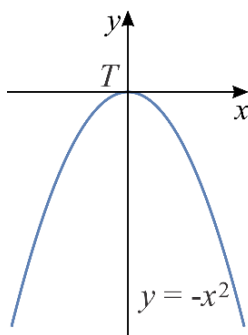
Në këtë rast, barazimi katror përkatës ka një rrënjë reale . Atëherë, funksioni katror mund të shkruhet në formën .

Pasi për çdo përveç për , shenja e është e njëjtë me shenjën e koeficientit Domethënë, nëse , vlera e funksionit është negative për çdo numër real për përveç për , kur , kurse është pozitiv për çdo numër real përveç për , kur .

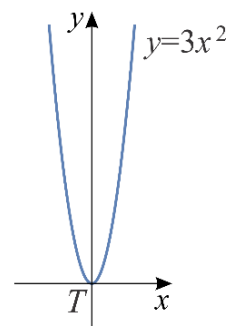
Shembulli 2. Funkzioni është pozitiv për të gjithë , kurse është negativ për çdo .

Grafikët e tyre janë paraqitur te vizatimi 11 dhe vizatimi 12, përkatësisht. ♦

Vizatimi 11 Vizatimi 12



Цртеж 11



Цртеж 12

III. Diskriminanta e funksionit katror është negativ

Funksionin katror do ta shkruajmë në formën kanonike

Pasi edhe përfundojmë se , përkatësisht , për çdo numër real . Pasi , shenja e funksionit është e njëjtë me shenjën e koeficientit

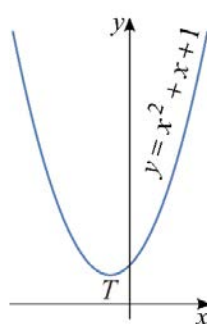
$$f(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

Domethënë, nëse , vlera e funksionit është negative për çdo numër real kur , kurse është pozitive për çdo numër real kur

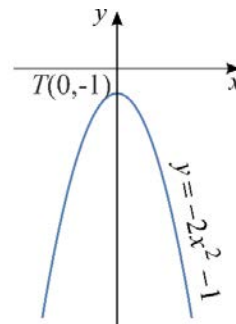
Shembulli 3. a) ta caktojmë shenjën e funksionit . Në këtë rast edhe . Domethënë, funksioni katror për çdo numër real x është pozitiv. Grafiku i tij është treguar te vizatimi 13.

b) Funksioni katror ka diskriminantë negative. Pasi vijon se ai është negativ për çdo numër real . Grafiku i tij është treguar te vizatimi 14.

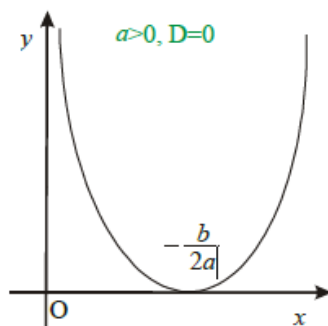
Vizatimi 13 Vizatimi 14



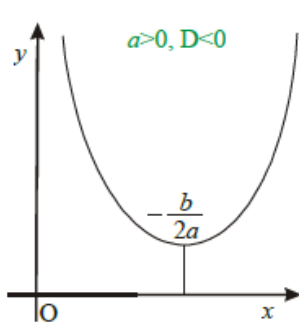
Цртеж 13



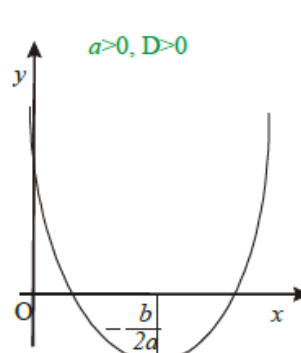
Цртеж 14



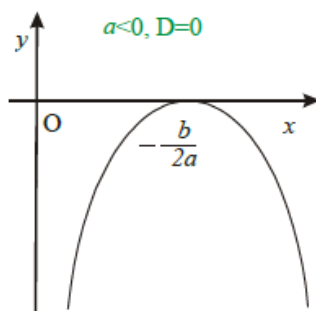
Цртеж 15



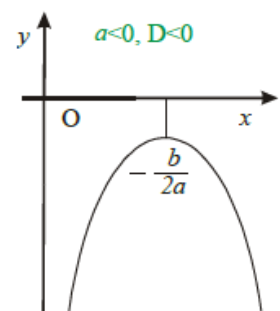
Цртеж 16



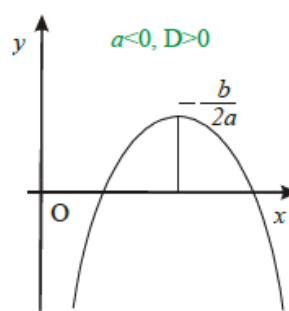
Цртеж 17



Цртеж 18



Цртеж 19



Цртеж 20

Prej diskutimit paraprak vijon se për funksionin katror janë të mundshme këto forma të grafikëve të tyre (vizatimi 15-vizatimi 20).

Detyra

1. Gjeje shenjën e këtyre funksioneve katrore:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$; **б)** $f(x) = -x^2 + 3x + 4$; **в)** $f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$.

a) b) c)

2. Për cilat vlera të ndryshores x funksionet katrore

a) $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$; **б)** $f(x) = -(x + 6)^2 - 4$; **в)** $f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 1)$; c)

kanë vlerë pozitive?

3. Si është shenja e funksionit katror në intervalin $f(x) = x^2 - 11x + 28$

a) b) c) ç) a) $(-5,0)$; b) $(2,5)$; B) $(6,9)$; r) $(12,20)$?

4. Konstrukto grafikun e këtyre funksioneve:

a) b) c) ç) d) dh)

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$; b) $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$; B) $f(x) = 5x^2 + 3x + \frac{1}{2}$;

r) $f(x) = -(x-3)^2 - 3$; D) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 5$; r) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

6.5. Pabarazimi katror me një të panjohur

Koncepti për pabarazim katror

Në vitin I jeni njohur me konceptet: pabarazim, bashkësi e përkufizimit të pabarazimit, zgjidhje të pabarazimit, pabarazime ekuivalente dhe me transformimet përkatëse të cilat pabarazimin e transformojnë në pabarazim ekuivalent me atë. Këtu do t'i shqyrtojmë dhe do t'i mësojmë pabarazimet katrore me një të panjohur.

Sikurse gjer më tani theksuam, barazimi i shkallës së dytë me një të panjohur quhet **pabarazim katror me një të panjohur**, shkurtimisht **pabarazim katror**.

Shembulli 1. a) Pabarazimi është linear me një të panjohur;

b) Pabarazimi është pabarazim katror me një të panjohur;

c) Pabarazimi është linear me dy të panjohura;

ç) Pabarazimi është pabarazim katror me dy të panjohura. ♦

Shembulli 2. Pabarazimet katrore dhe janë ekuivalente në bashkësinë e numrave realë pozitivë, kurse nuk janë ekuivalente në gjithë bashkësinë e numrave realë. ♦

Shembulli 3. Pabarazimi katror është ekuivalent me pabarazimin , i cili është linear. ♦

Shembulli 4. Pabarazimi katror është ekuivalent me pabarazimin . ♦

Të zgjidhet pabarazimi katror domethënë të caktohet bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit, përkatësisht të caktohen të gjitha vlerat e të panjohurës për të cilën pabarazimi kalon në pabarazim të saktë numerik, ose të konstatohet se ai nuk ka zgjidhje.

Për të zgjidhur pabarazim katror të dhënë, të njëjtin e transformojmë në tjetër më të thjeshtë por ekuivalent me atë, ndërsa nuk arrijmë deri te pabarazimi bashkësia e zgjidhjeve të cilës është shënuar. Me transformimet përkatëse çdo pabarazim katror me një të panjohur sillet deri te pabarazimi ekuivalent me atë pabarazim të llojit (ose),

të quajtur **forma e përgjithshme** e pabarazimit katror me një të panjohur, ku a , b dhe c janë numra realë, të quajtur koeficientë të pabarazimit. Poashtu koeficienti a quhet **koeficient i parë** ose koeficienti para x^2 , koeficienti b quhet **i dytë ose koeficient i mesëm**, kurse koeficienti c **koeficient i tretë** ose **anëtar i lirë**.

Shembulli 5. a) Pabarazimi është katror me koeficientët dhe

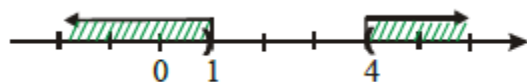
b) Pabarazimi është katror me koeficientët dhe
 c) Pabarazimi është katror me koeficientët dhe ♦
Shembulli 6. Pabarazimi është ekuivalent me pabarazimin ♦

Kujdes: Kur të dy anët e një pabarazimi do të shumëzohen me ndonjë shprehje, duhet pasur vëmendje dhe të shqyrtohen rastet kur ajo shprehje është pozitive, kur është negative, kurse kur është e barabartë me zero.

Zgjidhja e pabarazimeve katrore me ndihmën e funksionit përkatës katror

Ta caktojmë bashkësinë e zgjidhjeve të pabarazimit katror të formës
 Nëse e shqyrtojmë funksionin katror përkatës, atëherë zgjidhja e pabarazimit të dhënë kalon në kërkimin e përgjigjes së pyetjes kur funksioni katror është pozitiv (zgjidhja nuk do të thotë zgjidhje e problemit kur funksioni është pozitiv ose i barabartë me zero). Me fjalë të tjera, gjetja e bashkësisë së zgjidhjeve të pabarazimit katror të dhënë sillet në përcaktimin e shenjes së funksionit katror përkatës. Bashkësinë e zgjidhjeve mund ta paraqesim grafikisht, duke shlyer pjesën prej boshtit numerik të cili shtrihen pikat të cilat korrespondojnë në zgjidhjet e pabarazimit katror

Detyra 7. Zgjidhe pabarazimin katror



Vizatimi 21

Zgjidhje. Në këtë rast diskriminanta e funksionit katror përkatës është . Funksioni katror ka dy zero reale të ndryshme: dhe

Pasi, koeficienti para është pozitiv, funksioni do të jetë pozitiv për çdo . Prandaj, bashkësia e zgjidhjeve është , të paraqitur te vizatimi 21. ♦

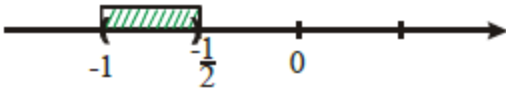
Detyra 8. Zgjidhe pabarazimin katror

Zgjidhje. Diskriminanta e funksionit katror është , kurse koeficienti para është pozitiv. Prandaj, funksioni katror është pozitiv për çdo numër real përkatësisht bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë është bashkësia e numrave realë x . ♦

Detyra 9. Zgjidhe pabarazimin katror .

Zgjidhje. Diskriminanta e funksionit katror është , pra sipas kësaj funksioni katror ka dy zero reale, të ndryshëm dhe

Vizatimi 22



Detyra 10. Zgjidhe pabarazimin katror

Zgjidhje. Diskriminanta e funksionit katror është pozitiv, pra ai është pozitiv për çdo numër real pabarazimit katror të dhënë është . ♦

Detyra 11. Zgjidhe pabarazimin katror

Zgjidhje. Diskriminanta e funksionit katror është reale: dhe

, kurse koeficienti i parë është . Domethënë, bashkësia e zgjidhjeve të

. Atëherë funksioni katror ka dy zero



Vizatimi 23

Pasi, koeficienti para shkallës më të lartë të të panjohurës është pozitiv, funksioni katror përkatës është pozitiv ose i barabartë me zero për çdo . Prandaj, bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit katror të dhënë është treguar grafikisht te vizatimi 23. ♦

Detyra 12. Zgjidhe pabarazimin katror

Zgjidhje. Diskriminanta e funksionit katror është , por koeficienti para shkallës më të lartë të të panjohurës është negativ. Atëherë funksioni katror përkatës është negativ për çdo x . Prandaj, bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit është bashkësia e zbrazët, përkatësisht . ♦

Detyra

1. Gjeje numrin e të panjohurave te këto pabarazimi:

a) $x + 2 > 3$;

b) $x^2 + 3x \leq 4x - 7$;

B) $x + 2y < 3$;

r) $x + 2yz + 3z > 0$.

a) b) c) ç)

2. Gjeje shkallën e këtyre pabarazimeve:

a) $3x + 2 > -1$;

b) $3x^2 - 7x \geq 4x - 1$;

B) $x^5 + 12x^3 < 2x$;

r) $3x^3y + 2yz^2 < 3xyz$.

a) b) c) ç)

3. Transformoju deri në formën

këto pabarazime katrore:

a) $3x^2 + 2 > 3x$;

b) $4(x^2 - 2) > 8$;

c) $\frac{x^2 + 9}{4} - x < x + 1$;

d) $x^2 - \frac{1}{2}x < 2 - \frac{1}{3}x^2 - 3$.

a) b) c) d)

4. Kontrolllo $x = 3$ a është zgjidhje e pabarazimit katror:

a) $x^2 - 1 > 2x$;

b) $3(x^2 - 2x + 1) \geq 8$;

c) $\frac{5x^2 - 9}{3} - 2x \leq \frac{x + 3}{4}$;

d) $1 - \frac{2}{x^2 - 9} < \frac{1}{x + 3}$.

a) b) c) d)

5. Zgjidhi këto pabarazime katrore:

a) $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$;

b) $49x^2 + 42x + 9 > 0$;

c) $36x^2 - 60x + 25 < 0$;

d) $81x^2 + 36x + 4 \geq 0$;

e) $-x^2 + 5x + 14 \geq 0$;

f) $-2x^2 + 11x + 63 < 0$.

a) b) c) d) e) f)

6. Cilat prej këtyre pabarazimeve katrore janë pabarazime identike, kurse për cilat bashkësia e zgjidhjeve është bashkësi e zbrazët?

a) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \geq x - 4$;

b) $x^2 + 1 \leq 0$;

c) $(x - 4)(x + 4) > x^2 - 4$;

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right) > x(x + 1) + \frac{3}{4}$.

a) b) c) d)

6.6. Zgjidhja e pabarazimeve katrore me zbërthim

Le të jetë dhënë pabarazimi katror

Trinom quhet trinom katror përkatës i pabarazimit të dhënë katror. Deri te bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë katror mund të arrijmë edhe me zbërthimin e trinomeve katrore përkatëse të shumëzuesve linearë, përkatësisht

ku dhe janë rrënjë të ndryshme reale të trinomit katror përkatës. Atëherë zgjidhja bazohet në këto dy gjykime të cilat vlejné për numrat realë:

$A \cdot B > 0$ nëse dhe vetëm nëse ($A > 0$ dhe $B > 0$) ose ($A < 0$ dhe $B < 0$)

$A \cdot B < 0$ nëse dhe vetëm nëse ($A > 0$ dhe $B < 0$) ose ($A < 0$ dhe $B > 0$).

Kështu, problemin e zgjidhjes së pabarazimit të dhënë katror e sjellim në problem të zbërthimit të trinomit katror të shumëzuesve, kurse pastaj me ndihmën e gjykimeve të sipërme, në zgjidhjen e sistemit të pabarazimeve lineare me një të panjohur.

Detyra 1. Zgjidhe pabarazimin katror

Zgjidhje. Pasi pabarazimi i dhënë është ekuivalent me pabarazimin përkatësisht . Duke zbatuar gjykimet e sipërme e fitojmë këtë ekuivalencë

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 2) < 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{5}{2} > 0 \\ x + 2 < 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{5}{2} < 0 \\ x + 2 > 0 \end{array} \right.$$

Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të parë është bashkësia e zbrazët, ndërsa bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të dytë është intervali . Unioni i të dy bashkësive të zgjidhjeve është intervali

Detyra 2. Zgjidhe pabarazimin

Zgjidhje. Pabarazimin e dhënë e shkruajmë në llojin , përkatësisht . Pabarazimin e fundit do ta sjellim në pabarazim katror. Pikërisht, nëse të dy anët e pabarazimit i shumëzojmë me për e fitojmë pabarazimin ekuivalent përkatësisht bashkësia e zgjidhjeve të të cilit është intervali .

Pabarazimin prej shembullit paraprak mund ta zgjidhim edhe duke shfrytëzuar këto gjykime të cilat vlejnë për numra realë:

. Nëse dhe vetëm nëse ($A > 0$ dhe $B > 0$) ose ($A < 0$ dhe $B < 0$)

. Nëse dhe vetëm nëse ($A > 0$ dhe $B < 0$) ose ($A < 0$ dhe $B > 0$).

Detyra

1. Për cilat vlera të x trinomi ka

a) vlerë pozitive; b) vlerë negative;

c) vlerë të barabartë me zero?

2. Zgjidhi këto pabarazime katrore:

a) b) c) ç) d) dh).

a) $x^2 - 4 < 0$; б) $9 - x^2 \leq 0$; в) $x^2 + 1 \leq 0$;

г) $x^2 + 3 > 0$; д) $x^2 - 7x + 12 > 0$; е) $x^2 + 3x - 40 > 0$.

3. Gjeje bashkësinë e zgjidhjeve të këtyre pabarazimeve katrore:

a) b) c) ç) d) dh)

a) $\frac{x^2 + 7}{2} < 4x$; б) $(x - 1)^2 > -3x + \frac{x - 1}{2}$;

в) $\frac{x - 3}{2} - x < \frac{x(x + 2)}{3} - 1$; г) $x\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{x}{2} + 12$;

д) $\frac{x}{5} - 1 > \frac{1}{3}x(2x - 1)$; е) $\frac{3x - 1}{2} - 2x < \frac{x^2 + 4x}{2} - 1$.

4. Zgjidhi këto pabarazime:

a) b) c) ç) d) dh)

a) $\frac{x - 3}{x + 1} > 0$; б) $\frac{1 - 4x}{x - 4} < 0$; в) $\frac{4x - 2}{2x + 1} \leq 0$;

г) $\frac{3x + 13}{x} \geq 4$; д) $\frac{x - 3}{x} \geq -3$; е) $1 - \frac{x - 2}{2x + 1} < -\frac{1}{2}x$.

6.7. Sistemi dhe bashkësia prej dy pabarazimeve katrore me një të panjohur

Në këtë pjesë do të futim konceptet prej dy pabarazimeve katrore dhe bashkësia prej dy pabarazimeve katrore me një të panjohur.

Sistem prej pabarazimeve katrore

Për bashkësinë prej dy pabarazimeve katrore me të panjohurën e njëjtë themi se është **sistem i pabarazimeve katrore me një të panjohur**, nëse duhet të caktohen të gjitha ndryshoret për të cilat janë të kënaqur të dy pabarazimet te sistemi.

Zgjidhje e sistemit prej pabarazimeve katrore me një të panjohur është çdo vlerë e të panjohurës e cila është zgjidhje e çdonjërës prej pabarazimeve te sistemi. Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të dhënë të pabarazimeve katrore me një të panjohur përbëhet prej zgjidhjeve të përbashkëta të çdonjërës prej pabarazimeve te sistemi, përkatësisht prej prerjes së bashkësisë së zgjidhjeve të pabarazimeve të sistemit. Të zgjidhet sistemi i pabarazimeve katrore me një të panjohur do të thotë të caktohet bashkësia e zgjidhjeve.

Dy sisteme të pabarazimeve katrore me një të panjohur janë **ekuivalente** nëse kanë bashkësi të barabarta të zgjidhjeve. Nëse njëri prej pabarazimeve te sistemi e zëvendësojmë me pabarazimin ekuivalent të atij e fitojmë, sistemin e pabarazimeve ekuivalente të dhëna.

Prej teoremave për pabarazime ekuivalente, çdo sistem prej dy pabarazimeve katrore me një të panjohur është ekuivalent me sistemin e llojit

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0 \end{cases} \quad \text{ose} \quad \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \geq 0 \end{cases}$$

të quajtur **forma e përgjithshme e sistemit prej dy pabarazimeve katrore me një të panjohur me koeficient**

Shembulli 1. Sistemi është ekuivalent me sistemin

i cili është në formën e përgjithshme. Një zgjidhje e tij është $x = 10$, ndërsa $x = -1$ nuk është zgjidhje e tij. Me të vërtetë

$$\begin{cases} 10^2 - 4 \cdot 10 - 9 = 51 > 0 \\ 10^2 - 7 \cdot 10 - 5 = 25 > 0 \end{cases}, \text{ por } \begin{cases} (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 9 = -4 < 0 \\ (-1)^2 - 7 \cdot (-1) - 5 = 3 > 0 \end{cases} \quad \blacklozenge$$

Bashkësinë e zgjidhjeve mund ta paraqesim grafikisht. **Paraqitja grafike** e zgjidhjeve të sistemit prej dy pabarazimeve katrore me një të panjohur përbëhet prej kësaj:

1) E shlyejmë pjesën prej boshtit numerik në të cilin shtrihen pikat të cilat korrespondojnë me zgjidhjen e pabarazimit të parë.

2) te boshti numerik i njëjtë e shlyejmë pjesën në të cilën shtrihen pikat të cilat korrespondojnë zgjidhjet e pabarazimit të dytë.

3) Zona dy herë e shleyr përbëhet prej pikave të cilat korrespondon bashkësia e zgjidhjeve të sistemit.

Në vazhdim, nëpër disa shembuj do ta ilustrojmë metodën e zgjidhjes së sistemit të pabarazimeve katrore me një të panjohur.

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0. \end{cases}$$

Detyra 1. Zgjidhe sistemin

Zgjidhje. Së pari e zgjidhim pabarazimin
 . Bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dytë është
 zgjidhjeve të sistemit të dhënë.

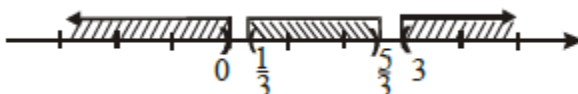


Vizatimi 24

Paraqitja grafike e zgjidhjes është dhënë te vizatimi 24. ♦

Detyra 2. Zgjidhe sistemin

Zgjidhje. Bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të parë është , kurse bashkësia e
 zgjidhjeve të pabarazimit të dytë është . Atëherë bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të
 dhënë është (vizatimi 25). ♦



Vizatimi 25

Detyra 3. Zgjidhe sistemin

Zgjidhje. Bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të parë katror është , kurse bashkësia
 e zgjidhjeve të pabarazimit të dytë është . Atëherë bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të
 dhënë është (vizatimi 26).



Vizatimi 26

Bashkësia prej dy pabarazimeve katrore me një të panjohur

Për bashkësinë prej dy pabarazimeve katrore me një ndryshore të njëjtë themi se është
bashkësia e pabarazimeve katrore me një të panjohur, nëse duhet të caktohen të gjitha
 vlerat e ndryshores për të cilën është kënaqur të paktën njëra prej pabarazimeve të sistemit.

Zgjidhja e bashkësisë së pabarazimeve katrore me një të panjohur është çdo numër real për të
 cilin të paktën njëri prej barazimeve me një të panjohur është çdo numër real x për të cilin të
 paktën njëri prej pabarazimeve të sistemi kalon saktë në barazim numerik.

Bashkësia e zgjidhjeve e bashkësisë së pabarazimeve katrore me një të panjohur përbëhet prej
 të gjithë numrave realë të cilët janë zgjidhje e bashkësisë, përkatësisht paraqet union të
 bashkësive të zgjidhjeve të çdonjërit prej pabarazimeve të bashkësia.

Detyra 4. Zgjidhe bashkësinë e pabarazimeve katrore

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ (x-1)(x-7) < 0 \end{cases}$$

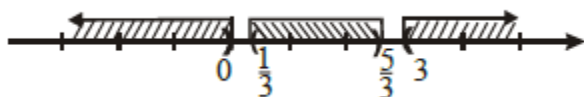
Zgjidhje. Bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të parë katror është , kurse bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dytë është Bashkësia e zgjidhjeve të bashkësisë së dhënë është (vizatimi 27).



$$\begin{cases} 9x^2 - 18x + 55 < 0 \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$$

Detyra 5. Zgjidhe bashkësinë e sistemit të pabarazimeve

Zgjidhje. Bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të parë katror është , kurse bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dytë është Bashkësia e zgjidhjeve të bashkësisë së dhënë është (vizatimi 28)♦



Detyra

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 + 2x < 0 \end{cases} \text{ И } \begin{cases} x^2 + 4x + 7 > 0 \\ x^2 + 3x + 2 < 0 \end{cases}$$

1. Sistemi a janë ekuivalent?

2. Zgjidhi sistemet:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 > 0 \\ -x^2 + 1 < 0 \end{cases} \quad \text{б)} \quad \begin{cases} x^2 - 7x + 12 > 0 \\ 6x^2 - 5x + 1 < 0 \end{cases} \quad \text{в)} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 5 < 0 \\ x^2 - 99x + \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

a) b) c)

3. Gjeje bashkësinë e zgjidhjeve të sistemeve:

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 5 \geq 0 \\ x^2 + 10x + 16 < 0 \end{cases} \quad \text{б)} \quad \begin{cases} x^2 + 5x + \frac{25}{4} > 0 \\ 6x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{в)} \quad \begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

a) b) c)

4. Zgjidhi sistemet:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 7}{2} < 4x \\ (x - 2)(x + 3) < 0 \end{cases} \quad \text{б)} \quad \begin{cases} \frac{x - 3}{x + 1} > 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases} \quad \text{в)} \quad \begin{cases} \frac{3x - 1}{2} - 2x < \frac{x^2 + 4x}{2} - 1 \\ (x - 6)(x - 7) \leq 2(x + 14) \end{cases}$$

5. Gjeje bashkësinë e zgjidhjeve të gjithë pabarazimeve: a) b) c)

$$\text{а)} \quad \begin{cases} x^2 + 6x + 5 \geq 0 \\ x^2 + 10x + 16 < 0 \end{cases} \quad \text{б)} \quad \begin{cases} x^2 + 5x + \frac{25}{4} > 0 \\ 6x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{в)} \quad \begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

6.8.* Zbatimi i sistemit të pabarazimeve katrore

Sistemet e pabarazimeve katrore gjejnë zbatim në zgjidhjen e detyrave më të përbëra në matematikë. Do të shqyrtojmë disa shembuj.

Detyra 1. Zgjidhi pabarazimet

Zgjidhje. Prej

vijon se bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë është unioni i bashkësisë së dy sistemeve të pabarazimeve katrore. Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të parë është por të sistemit të dytë . Zgjidhje e pabarazimit të dhënë është bashkësia ♦

Detyra 2. Zgjidhe pabarazimin

Zgjidhje. Pasi

$$(x^2 + x - 12)(x^2 + x - 6) \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x - 12 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \geq 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x - 12 \leq 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{array} \right. ,$$

bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë është unioni i bashkësisë së zgjidhjeve të dy sistemeve të pabarazimeve katrore. Bashkësia e sistemit të parë është , por të sistemit të dytë . Zgjidhje e pabarazimit të dhënë është bashkësia e ♦

Detyra 3. A ekziston katror për të cilin shuma prej vlerave numerike të syprinës dhe perimetrit është më i madh se 5, kurse më i vogël se 21?

Zgjidhja. Ta shënojmë brinjën e katrorit të kërkuar me x . Prej kushtit të detyrës e fitojmë

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ x^2 + 4x - 21 < 0 \end{cases}$$

sistemin

i cili është ekuivalent me sistemin

Bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të parë është . Ndërsa bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dytë është . Zgjidhja e sistemit të pabarazimeve është . Prandaj, katrori me vetitë e kërkuara ekziston. Edhe aq më shumë, çdo katror gjatësia e të cilit është më e madhe se 1 dhe më e vogël se 3 i plotëson kushtet e detyrës. ♦

Detyra

1. Zgjidhi këto pabarazime:

a) $(x^2 - 4)(9x^2 - 12x + 4) \geq 0;$

b) $(x^2 + 1)(49x^2 + 42x + 9) > 0;$

b) $(36x^2 - 60x + 25)(81x^2 + 36x + 4) < 0;$

a) b) c) ç) **r)** $(-25x^2 + 30x - 9)(-9x^2 + 12x - 11) \leq 0.$

2. Gjeje bashkësinë e zgjidhjeve të këtyre pabarazimeve:

a)

a) $(x - 2)(x + 3)(x + 2)(x - 3) \geq 0;$

b) $(x - 4)^2(x^2 - 4x + 3) < 0;$

b)

c) $(x - 1)^2(x - 2)(x + 3) > 0;$

ç)

r) $(x - 1)(x - 2)(x + 7)(x - 3) \leq 0.$

3. Zgjidhi këto pabarazime:

a) $\frac{3x^2 - 8x}{x^2 - 27} \leq 0;$ b) $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 2x - 143} > 0;$ c) $\frac{x^2 - x - 90}{x^2 - 4x - 5} < 0.$

4. Gjeje bashkësinë e zgjidhjeve të këtyre pabarazimeve:

a) $\frac{(x-4)^2}{12x^2 - 5x - 2} > 0;$ b) $\frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x-7)} \leq 0;$ c) $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} < 0.$

a) b) c)

Zgjidhja e pabarazimit të dhënë është bashkësia ♦

5. Gjej dy numra natyrorë të njëpasnjëshëm për të cilët shuma prej katrorëve të tyre është më i vogël se 41, kurse prodhimi i tyre është më i madh se 6.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Gjeji zerot e funksioneve katrore:

a) $f(x) = x^2 + x;$ b) $f(x) = (x-3)^2 + 8;$ c) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2.$

2. Për funksionin katror $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{89}{18}$ gjeji koordinatat e kulmit.

3. Cakto shenjën e këtyre funksioneve katrore:

a) $f(x) = 6x^2 - 37x + 1;$ b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2;$ c) $f(x) = -(x-5)^2 - 4.$

4. Është dhënë funksioni katror $f(x) = (m-2)x^2 + (m^2 - m - 2)x - m, m \neq 2.$

Gjeje vlerën e parametrin m nëse pika i takon grafikut të funksionit të dhënë katror, kurse pastaj, për vlerën e fituar gjeji koordinatat e kulmit.

5. Shqyrto vetitë dhe vizato grafikun e këtyre funksioneve katrore:

a) $f(x) = (x-1)^2 - 4;$ b) $f(x) = (x-1)(x+3);$ c) $f(x) = -9x^2 + 4x - \frac{1}{2}.$

a) b) c)

6. Zgjidhi këto pabarazime:

a) $x^2 - 8x + 7 > 0;$ b) $12 + x - x^2 \leq 0;$ c) $(x + \frac{3}{2})(x - 2) \geq 0;$

d) $\frac{5x+4}{6} - x < \frac{x(x+1)}{2} + 1;$ e) $\frac{x+3}{x} \geq -2;$ f) $2 - \frac{x-1}{x+1} < -\frac{1}{2}.$

7. Gjeje bashkësinë e zgjidhjeve të sistemeve:

a) $\begin{cases} 5x^2 + 6x + 1 \geq 0 \\ 16x^2 + 10x + 1 < 0 \end{cases};$ b) $\begin{cases} 7x^2 + 4x + 1 > 0 \\ (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{16x+1}{4} < 84 \end{cases};$ c) $\begin{cases} \frac{x+1}{x-3} > 0 \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{cases}.$

a) b) c)

8. Zgjidhi pabarazimet:

a) $(x^2 + 4)(14x^2 - 53x + 14) > 0;$ b) $(x+4)(x-1)(12x^2 - 25x + 12) > 0;$

c) $(3x^2 - 9x + 7)(14x^2 - 7x + 1) \leq 0.$

9. Gjeje bashkësinë e zgjidhjeve të këtyre pabarazimeve:

a) $\frac{(x-2)^2}{24x^2 - 5x - 1} > 0;$ b) $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x-7)} \leq 0;$ c) $\frac{x-4}{(x-7)(2x^2 - 5x - 12)} < 0.$

a) b) c)

10. Shuma e katrorëve të dy numrave natyror tek të njëpasnjëshëm është më e madhe prej 74 por më e vogël prej 202. Cilët janë ata numra?

7. VEKTORËT NË RRAFSH. FIGURAT GJEOMETRIKE NË HAPËSIRË

7.1. Koncepti për vektorin

Vitin e kaluar shkollor u njohe me konceptet: pika, drejtëza, rrafshi, largësia, segmenti e të tjera, pozitat e tyre reciproke sikurse edhe mënyrat e shënimit.

Gjatë zgjidhjes së detyrave vërejmë se disa koncepte, sikurse që janë gjatësia e segmentit, syprina e trekëndëshit, masa e ndonjë trupi, temperatura e ujit e të tjera, janë përcaktuar vetëm me numër real (skalar) i cili paraqet raportin e atij koncepti me masën njësi për madhësinë e tij. Konceptet (madhësitë) e këtilla quhen **skalare**. Kështu, për shembull, nëse masa e një trupi është 2kg, atëherë ajo është dy herë më e madhe për masën 1kg.

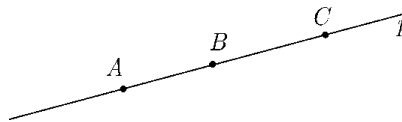
Ekzistojnë koncepte (forca, nxitimi, fuqia e fushës magnetike...), të cilët, përveç me vlerën e tij numerike, janë përcaktuar edhe me drejtimin e vet dhe me kahun e vet. Për shembull, nëse themi se era fryn me shpejtësi prej 20km/h, me atë vetëm e kemi thënë vlerën numerike të shpejtësisë së erës. Nuk e dimë në cilin drejtim ka fryrë ajo ose në cilën kahe. Domethënë, për të caktuar shpejtësinë e erës nuk është e mjaftueshme vetëm vlera e saj numerike. Nëse themi se edhe era fryn në drejtim veri-jug, e kemi thënë edhe drejtimin e shpejtësisë së erës. Ngjel edhe të themi se era a fryn prej jugut nga veriu ose prej veriut nga jugu. Këtë e përcakton kahja. Konceptet (madhësitë) e këtilla të cilat janë përcaktuar me shpejtësinë e vet, drejtimin e vet dhe kahun e vet quhen **vektoriale**.

Le të jetë p drejtëz në rrafsh. Drejtëza p së bashku me të gjitha drejtëzat paralele me atë përcaktojnë **drejtim në rrafsh**. Më tej drejtimin do ta identifikojmë me njërën prej drejtëzave, të cilat ndërmjet veti janë paralele, d.m.th., ajo drejtëz do të jetë përfaqësues i drejtimin.

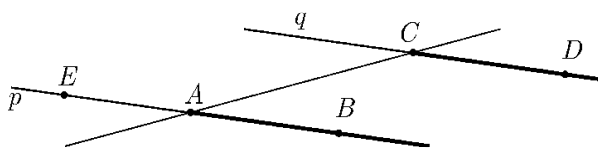
Të shqyrtojmë dy gjysmëdrejtëza të cilat shtrihen në drejtëzën e njëjtë (d.m.th., janë nënbashkësi prej drejtëzës së njëjtë). Nëse njëra gjysmëdrejtëz është nënbashkësi prej tjetrës, themi se gjysmëdrejtëzat kanë **kahe të njëjtë**. Në të kundërtën do të themi se kanë **kahe të kundërt**.

Vizatimi 1

Te vizatimi 1 gjysmëdrejtëzat AC dhe BC kanë kahe të njëjtë pasi BC është nënbashkësi prej AC . Gjysmëdrejtëzat BA dhe AC kanë kahe të kundërta pasi as $BA \subseteq AC$, as $AC \subseteq BA$.



Tani të shqyrtojmë dy gjysmëdrejtëza AB dhe CD , të cilat shtrihen në dy drejtëza paralele p dhe q , përkatësisht. Pikat e tyre fillestare le të jenë A dhe C . Drejtëza AC e ndan rrafshin në dy gjysmërrafshe dhe çdonjëra prej gjysmëdrejtëzave është nënbashkësi prej njërit gjysmërrafsh. Nëse të dy gjysmëdrejtëzat janë nënbashkësi prej gjysmërrafshit të njëjtë, atëherë themi se të dy gjysmëdrejtëzat kanë **kahe të njëjtë**. Në të kundërtën do të themi se kanë kahe të kundërta. Kështu, te vizatimi 2, gjysmëdrejtëzat AB dhe CD kanë kahe të njëjtë, kurse AE dhe CD kanë kahe të kundërt. Është e qartë se EA dhe CD kanë kahe të njëjtë. Vizatimi 2



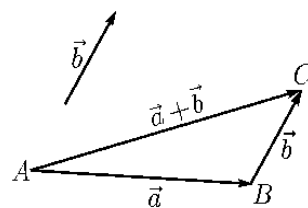
Domethënë kahja përkufizohet vetëm nëse gjysmëdrejtëzat kanë drejtim të njëjtë.

Përkufizimi. Vektor paraqet objekt matematikor, i cili është përcaktuar me: madhësinë, drejtimin dhe kahun e vet.

7.2. Operacionet me vektor

Mbledhja e vektorëve

Le të jenë a dhe b çfarëdo vektor në rrafsh. Nëse e shënojmë $AB = a$, atëherë mund të konstruktojmë drejtëz e cila kalon nëpër pikën A dhe është paralele me drejtëzën e cila është përcaktuar me vektorin b . Në këtë mënyrë e fitojmë vektorin $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ i cili është lidhur me vektorin a d.m.th., fillimi i b puthitet me fundin e a (vizatimi 10). Domethënë, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ dhe $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$



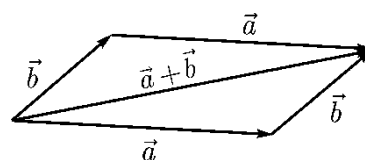
Vizatimi 10

Përkufizimi. Shuma e vektorëve a dhe b quhet vektori $\overrightarrow{AC}$, d.m.th., vektori fillimi i të cilit është fillimi i a , kurse mbarimi është fundi i b .

Shumën e a dhe b do ta shënojmë me $\vec{a} + \vec{b}$, d.m.th., $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Kjo mënyrë e mbledhjes së vektorëve quhet **rregulla e trekëndëshit**.

Nëse në vend t'i lidhim njërin në tjetrin, vektorët jokolinear i sjellim në fillimin e njëjtë (vizatimi 11), atëherë shuma e vektorëve ka drejtim dhe madhësi të diagonales së paralelogramit dhe kahe prej kulmit që është fillim i përbashkët. Kjo mënyrë e mbledhjes quhet **rregulla e paralelogramit**.



Vizatimi 11

Do të vërtetojmë disa veti të shumës së vektorëve.

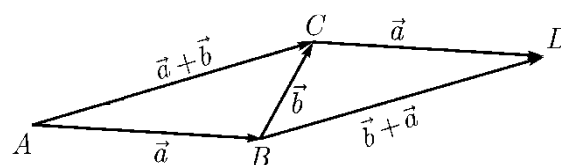
- Për çdo vektor $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vlen $\boxed{a+b=b+a}$, d.m.th., vlen ligji **komutativ mbledhjen e vektorëve**.

Me të vërtetë, le të jenë dhënë vektorët

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ dhe $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ (vizatimi 12) shumën

$\vec{b} + \vec{a}$ e fitojmë kur fundi b fitojmë kur a dhe

fillimit të $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{BD}$ puthiten, d.m.th.,



Vizatimi 12

Atëherë $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ dhe AB dhe CD janë paralele, pra $ABCD$ është paralelogram.

Domethënë, vektorët $\overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{BD}$ kanë madhësi të barabarta AC dhe BD kahe të njëjtë.

Vijon $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{a}$. ♦

Le të jenë, tani, të tre vektorët të lidhur njëri në tjetrin, d.m.th.,

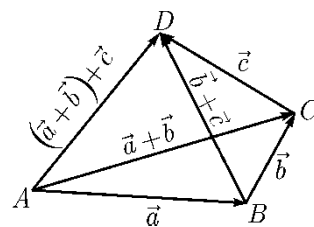
le të jenë $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ dhe $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ (vizatimi 13).

Atëherë $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ dhe $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ pra vijon se vlen kjo veti

- Për çfarëdo vektor a, b

$$\boxed{\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}}$$

d.m.th., vlen **ligji asociativ për mbledhjen**



Vizatimi 13

Në përgjithësi, për mbledhjen e n vektorëve, ku n është numër natyror, shfrytëzohet **rregulla e shumëkëndëshit**. Vektorët janë „lidhur” njëri në tjetrin (fillimi i pasardhësit është te fundi i paraardhësit) dhe shuma e tyre fillimi i të cilit është te fillimi i të parit, kurse fundi te vektorit i fundit (vizatimi 14).

- Për çdo vektor a vlen $\boxed{\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}}$.

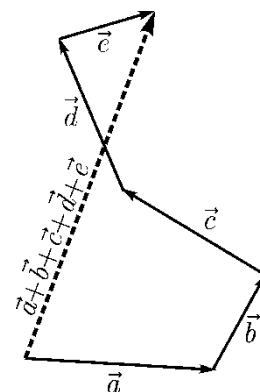
Me të vërtet, nëseo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{0} = \overrightarrow{BB}$

Atëherë $\vec{a} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$. ♦

Nëse $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Atëherë $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ pra

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ sipas kësaj vlen kjo veti:

Për çdo vektor $\vec{a}$ vlen $\boxed{\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}}$



Vizatimi 14

Shembulli 1. Le të jenë A, B dhe C tri pika në rrafsh. Vектори $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ është vektor zero, pasi prej rregullit të trekëndëshit kemi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. ♦

Zbritja e vektorëve

Përkufizimi. Nëse A, B dhe C janë çfarëdo vektor. atëherë ndryshimi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ përkufizohet me $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

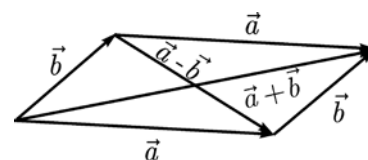
Kjo do të thotë se zbritja e vektorëve është mbledhje e një vektori dhe i kundërti i vektorit tjetër. Prandaj, ndryshimi

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB},$$

për çfarëdo pika A, B dhe C prej rrafshit.

Nëse kemi paralelogram të konstruktuar mbi dy vektor $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, atëherë vektorët $\vec{a} + \vec{b}$ shtrihen te diagonalja e cila kalon

nëpër fillimin e tyre të përbashkët, kurse vektori $\vec{a} - \vec{b}$ i diagonales tjetër (vizatimi 15).



Vizatimi 15

Shumëzimi i vektorëve me numër (skalar)

Le të jetë a vektor dhe k është skalar (numër real). Vекtori i përcaktuar me: drejtim të njëjtë me drejtimin e a , gjatësia $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ dhe nëse $k > 0$, vektorët ka dhe a kanë kahe të njëjta, kurse nëse $k < 0$, vektorët ka dhe a kanë kahe të kundërta.

Përkufizimi. Vекtori $k\vec{a}$ quhet prodhimi i vektorit a me skalarin k .

Për shumëzimin e vektorit me skalar vlejné këto veti:

- Për çdo vektor a dhe skalar k vlen

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}, k \cdot \vec{0} = \vec{0}, 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$$

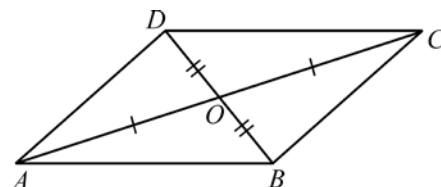
- Për çdo skalar k dhe m dhe vektorit $\vec{a}$ vlen $\boxed{k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}}$ dhe $\boxed{(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}}$

- Për çdo skalar k dhe çdo vektor $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vlen $\boxed{k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}}$.

Vektorët jozero $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë kolinear nëse dhe vetëm nëse ekziston skalar $k \neq 0$, ashtu që $\vec{a} = k\vec{b}$. Nëse $k \neq 0$ me $\frac{\vec{a}}{k}$ do ta shënojmë vektorin $\frac{1}{k}\vec{a}$. Domethënë, $\frac{\vec{a}}{k} = \frac{1}{k}\vec{a}$.

Detyra 1. Le të jetë ABCD paralelogram dhe O prerja e diagonaleve të tij. Thjeshto shprehjet:

- a) $\vec{AB} + \vec{CO}$,
 b) $\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + \vec{DO}$, c) $(\vec{BC} + \vec{OA}) + \vec{OC}$,
 r) $(\vec{AB} + \vec{DO}) + \vec{OA}$, d) $\vec{DO} + \vec{BC} + \vec{OA} + \vec{AB}$, f) $\vec{AD} - \vec{BO}$



Vizatimi 16

Zgjidhja. a) $\vec{AB} + \vec{CO} = \vec{AB} + \vec{OA} = \vec{OB} = \vec{DO}$ ако
 искористиме дека $\vec{CO} = \vec{OA}$ или

$\vec{AB} + \vec{CO} = \vec{DC} + \vec{CO} = \vec{DO}$ ако искористиме дека $\vec{AB} = \vec{DC}$,

б) $\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + \vec{DO} = \vec{0}$, бидејќи $\vec{AO} = -\vec{CO}$ и $\vec{BO} = -\vec{DO}$,

в) $(\vec{BC} + \vec{OA}) + \vec{OC} = \vec{BC} + (\vec{OA} + \vec{OC}) = \vec{BC}$, бидејќи $\vec{AO} = -\vec{CO}$

г) $(\vec{AB} + \vec{DO}) + \vec{OA} = \vec{OB} - \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OA} = 2\vec{OB} = \vec{DB}$

д) $\vec{DO} + \vec{BC} + \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{DO} + \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{DC}$, f)

$\vec{AD} - \vec{BO} = \vec{BC} - \vec{BO} = \vec{BC} + \vec{OB} = \vec{OC}$ или $\vec{AD} - \vec{BO} = \vec{AD} - \vec{OD} = \vec{AD} + \vec{DO} = \vec{AO} = \vec{OC}$. ♦

Пример 2. На цртежот 17, дадени се векторите $\vec{a} = \vec{AM}$ и $\vec{b} = \vec{AN}$ такви што $\vec{AM} = \vec{MB}$ и $\vec{AN} = \vec{NC}$. Ќе ги изразиме векторите $\vec{BM}$, $\vec{NC}$, $\vec{MN}$, $\vec{BN}$ со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

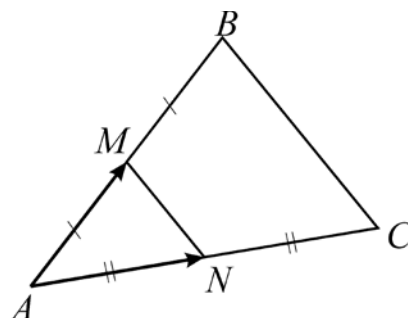
За векторот $\vec{BM}$ имаме: $\vec{BM} = \vec{MA} = -\vec{AM} = -\vec{a}$, слично

$\vec{NC} = \vec{b}$, а за векторот $\vec{MN}$ од правилото на триаголник

имаме: $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = -\vec{a} + \vec{b}$, но

$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \vec{b} - \vec{a}$ ако се искористи разлика на

вектори и $\vec{BN} = \vec{BA} + \vec{AN} = \vec{BM} + \vec{MA} + \vec{AN} = \vec{BM} - \vec{AM} + \vec{AN} = -\vec{a} - \vec{a} + \vec{b} = -2\vec{a} + \vec{b}$. ♦



Vizatimi 17

Задача 2. Упрости ги изразите:

a) $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$,

б) $2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) + 4\vec{b} + 5(\vec{c} - \vec{a})$

Zgjidhja. Me zbatimin e vetive për shumëzim të vektorit me skalar fitohet:

a) $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 3\vec{a} + 2\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$,

б) $2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) + 4\vec{b} + 5(\vec{c} - \vec{a}) = 2\vec{a} - 4\vec{b} + 6\vec{c} + 4\vec{b} + 5\vec{c} - 5\vec{a} = -3\vec{a} + 11\vec{c}$. ♦

Detyra 3. Në çfarë pozite reciproke gjenden pikat A, B dhe C nëse vlen

$\vec{AB} = 2\vec{AC}$?

Zgjidhja. Ёshtë e qartë se pikat A, B dhe C shtrihen në drejtëzën e njëjtë, d.m.th., janë kolineare. Duhet ta caktojmë renditjen e atyre pikave te drejtëza. Prej barazimit $\vec{AB} = 2\vec{AC}$ vijon se gjatësia e segmentit $\overline{AB}$ është dyherë më e madhe se gjatësia e segmentit $\overline{AC}$

dhe vektorëve $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AC}$ janë me kahe të njëjtë. Për këtë përfundojmë se pika C shtrihet në mes ndërmjet pikave A dhe B . ♦

Detyra.

1. Shprehni vektorët $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$ dhe $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$ me ndihmën e vektorëve a dhe b nëse është paralelogram te vizatimi 18.

2. Le të jenë $CA = a$ и $CD = b$ sipas figurës 19, shprehni me ndihmën e a dhe b vektorët:

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CD}$ dhe $\overrightarrow{ED}$

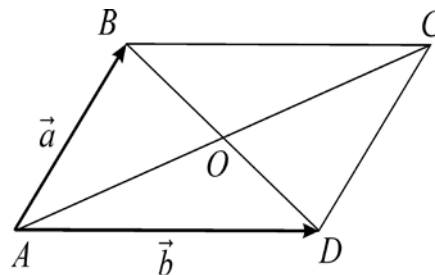
3. Është dhënë gjashtëkëndëshi i rregullt $ABCDEF$ dhe O është qendra e vijës rrethore të jashtëshkruar. Le të jenë $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ dhe $\overrightarrow{AF} = \vec{a}$ shprehni me ndihmën e a dhe b vektorët: $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CE}$ dhe $\overrightarrow{ED}$.

4. Diagonalet e paralelogramit $ABCD$ priten te pika S . Kontrolllo a vlejné barazimet:

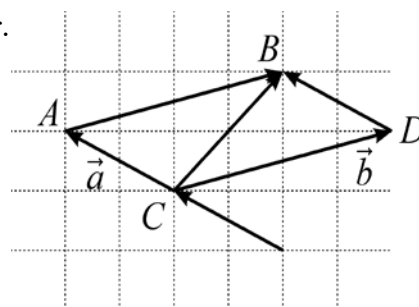
a) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DS}$ b) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{CS}$,

c) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} = \vec{0}$.

5. Thjeshtoji shprehjet $2(\vec{a} - \vec{b}) - 5(\vec{a} + \vec{b}) + 2\vec{a} + 6\vec{b}$.



Vizatimi 18



Vizatimi 19

7.3. Zbatimi i vektorëve

Vektorët kanë zbatim të gjerë në teknikë, fizikë, matematikë dhe shkencë të tjera. Këtu do të përmendim disa detyra me të cilat ilustron zbatimin e vektorëve në vërtetimin e disa gjykimëve nga gjeometria.

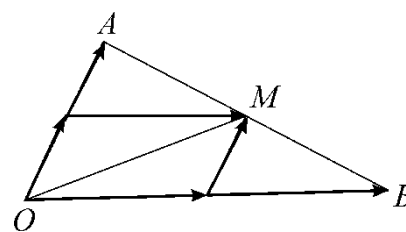
Detyra 1. Le të jetë M pika e mesme e segmentit AB , kurse O është çfarëdo pikë në rrafsh. Vërteto se

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

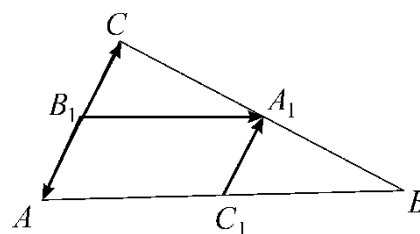
Решение. Имаме $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$, (цртеж 20). Ако ги собереме овие равенства, добиваме: $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$, $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})$, $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \vec{0}$, но $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ се спротивни вектори, па $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. ♦

Detyra 2. Pikat A_1 dhe B_1 janë meset e brinjëve AC dhe BC të trekëndëshit ABC (vizatimi 21).

Vërteto se $\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.



Vizatimi 20



Vizatimi 21

Zgjidhja. Vlen $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1}$. Nga ana tjetër kemi: $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$.

Me mbledhje të këtyre barazimeve, kemi: $2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$

$$2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{B_1A}) + (\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{BA_1}), \text{ од каде } \overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \vec{0} + \vec{0} \text{ т.е. } \overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \blacklozenge$$

Vërejtje. Segmenti (formula) quhet vija e mesme paralele me brinjën AB të $\triangle ABC$ dhe prej kësaj që $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ vijon se $|\overrightarrow{B_1A_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$, kurse këtë se vektorët janë

kolinear, d.m.th. $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ dhe $B_1A_1 \parallel AB$ d.m.th., vija e mesme të trekëndëshi ka gjatësi së brinjës paralele me atë.

Detyra 3. Le të jetë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë vektor jokolinear dhe x dhe y janë çfarëdo numra realë. Nëse $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$, atëherë $x = y = 0$. Vërteto!

Zgjidhja. Prej kësaj a dhe b janë vektor jokolinear vijon se ato nuk janë vektor zero. Të supozojmë të kundërtën, d.m.th., $x \neq 0$. Atëherë prej $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ vijon se $\vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b}$ që do të thotë se vektorët janë kolinear. Kjo është në kundërtënie me supozimin.

. Në mënyrë analoge fitohet nëse e marrim supozimin tjetër, d.m.th., $y \neq 0$. Prandaj, patjetër të vlen $x = y = 0$. $\blacklozenge$

Detyra 4. Diagonalet të çdo paralelogram përgjysmohen. Vërteto!

Zgjidhja. Le të jetë $ABCD$ paralelogram dhe O është pikëprerja e diagonaleve AC dhe BD . Pasi pikat A , O dhe C janë kolinare, vijon se ekziston numër real x ashtu që $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AC} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. Në mënyrë analoge, ekziston numër real y ashtu që

$$\overrightarrow{BO} = y\overrightarrow{BD} = y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}). \text{ pra patjetër}$$

$$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (x-1)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}, \text{ па мора}$$

$$y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (x-1)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} \text{ d.m.th. } (x-1+y)\overrightarrow{AB} + (x-y)\overrightarrow{AD} = \vec{0}.$$

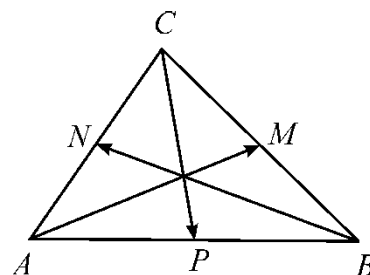
Vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AD}$. Nuk janë kolinear, pra prej detyrës 3 kemi $x-1+y=0$
 $x-y=0$ d.m.th $x=y=\frac{1}{2}$. $\blacklozenge$

Detyra

1. Le të jenë M , N dhe P meset e brinjëve të trekëndëshit ABC (vizatimi 22).

Vërteto $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

2.* Le të jetë T pika e rëndimit të $\triangle ABC$. Vërteto se $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, ku O është çfarëdo pikë në rrafsh.



Vizatimi 222

3. Është dhënë katrori $ABCD$ dhe S është pika te e cila priten diagonalet e tij. Le jenë M dhe N meset e brinjëve BS dhe DS , përkatësisht. Shprehi vektorët $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AM}$ dhe $\overrightarrow{BN}$ me ndihmën e vektorëve $\overrightarrow{AS} = \vec{m}$ dhe $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$.

4. Është dhënë gjashtëkëndëshi i rregullt $ABCDEF$ dhe S është qendra e vijës rrethore të jashtëshkruar. Thjeshtoj vektorët:

$$\text{a) } \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}, \quad \text{b) } \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{AB}, \quad \text{c) } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ES}, \quad \text{ç) } \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CS}.$$

5. Le të jenë D, E dhe F meset e brinjëve BC, AC dhe AB, përkatësisht, të $\triangle ABC$. Nëse Nëse $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{m}$ dhe $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{n}$, atëherë shprehi vektorët $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ dhe $\overrightarrow{CF}$ me ndihmën e vektorëve $\overrightarrow{m}$ dhe $\overrightarrow{n}$.

7.4. Aksiomat për gjeometrinë h hapësinore

Vitin e kaluar shkollor u njohtëm me konceptet themelore dhe të nxjerra, disa prej aksiomave dhe teoremave në gjeometrinë e rrafshit (planimetri). I mësove pozitat reciproke të koncepteve themelore pika dhe drejtëza në një rrafsh. Kjo pjesë i është përkushtuar pikërisht aksiomave dhe disa teoremave prej gjeometrisë së hapësirës (stereometria), si pozita reciproke të koncepteve themelore pika, drejtëza dhe rrafshi.

Të përkujtohem, të gjithë koncepteve saktësinë e të cilave e pranojmë pa përkufizim quhen **koncepte themelore**, kurse të gjitha konceptet e tjera quhen **koncepte të nxjerra**.

Gjatë ndërtimit të **gjeometrisë së hapësirës** nisemi prej koncepteve themelore: **pika, drejtëza, rrafshi, largësia dhe hapësira**, kurse pastaj duke shfrytëzuar ato si edhe të tjerat koncepte matematikore përkufizohen konceptet e tjera gjeometrike. Poashtu, çdo bashkësi e pikave në hapësirë quhet **vizatimi h hapësinore gjeometrike**. Konceptet themelore: pika, drejtëza, rrafshi dhe hapësira quhen edhe vizatimi themelore gjeometrike. Hapësira është bashkësi e pafundshme e pikave me shenjë P elementet e të cilit i shënojmë me $A, B, C, \dots$ shkronjat e mëdha të latinishtes.

Gjatë ndërtimit të gjeometrisë së hapësirës do të pranojmë se çdo pikë prej hapësirës gjendet në ndonjë largësi prej pikës tjetër. Për largësinë ndërmjet dy pikave A dhe B do ta shfrytëzojmë shenjë $\overline{AB}$ dhe i pranojmë këto aksioma:

A₁. Largësia prej një pikë A deri te pika tjetër B është numër real pozitiv ose zero, përkatësisht $\overline{AB} \geq 0$. Ky është numër pozitiv, nëse pikat janë të ndryshme, dhe është zero nëse ato puthiten, përkatësisht $\overline{AA} = 0$.

nëse $A \neq B$ atëherë $\overline{AB} > 0$, nëse $A = B$ atëherë $\overline{AB} = 0$

A₂. Për çfarëdo dy pika A dhe B , largësia prej A deri te B është e barabartë me largësinë prej B deri te A , përkatësisht $\overline{AB} = \overline{BA}$.

A₃. Për çfarëdo tri pika A, B dhe C , largësia prej A deri te C nuk është më e madhe prej shumës së largësive $\overline{AB}$ dhe $\overline{BC}$, përkatësisht $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$.

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Teorema 1. Për çfarëdo tri pika A, B dhe C , në hapësirë P , largësia $\overline{AC}$ është më e madhe ose e barabartë me ndryshimin e largësive $\overline{AB}$ dhe $\overline{BC}$, përkatësisht me kusht $\overline{AB} > \overline{BC}$ vlen pabarazimi $\overline{AC} \geq \overline{AB} - \overline{BC}$.

Me të vërtetë, në pajtim me aksiomën **A₃** kemi $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{BC}$. Nëse të dy anët e pabarazimit i zvogëlojmë për $\overline{BC}$, fitojmë $\overline{AB} - \overline{BC} \leq \overline{AC} + \overline{BC} - \overline{BC}$ përkatësisht $\overline{AB} - \overline{BC} \leq \overline{AC}$ që do të thotë $\overline{AC} \geq \overline{AB} - \overline{BC}$. ♦

Shembulli 1. Le të jenë A, B, C dhe D , çfarëdo katër pika në hapësirë P . Me ndihmën e zbatimit të njëpasnjëshëm të **A₃**, mund të përfundojmë se vlen

$$\overline{AD} \leq \overline{AB} + \overline{BD} \leq \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \quad \text{d.m.th.,} \quad \overline{AD} \leq \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$$

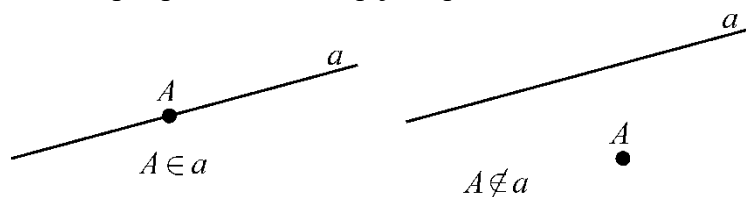
Detyra 1. Është e njohur se $\overline{AB} = 15$ dhe $\overline{BC} = 8$. A mund (formula) të jetë:

a) 6 , b) 16, c) 23, d) 2 e d) 0 .

Zgjidhja. Është e njohur se, prej **A₃**, vlen $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC} = 15 + 8 = 23$, kurse prej teoremës 1, vlen $\overline{AC} \geq \overline{AB} - \overline{BC} = 15 - 8 = 7$. Domethënë, $7 \leq \overline{AC} \leq 23$ pra të sakta janë përgjigjet b) dhe c). ♦

Drejtëzat dhe rrafshet janë koncepte themelore gjeometrike. Poashtu drejtëzat i shënojmë me a, b, c shkronjat e vogla të latinishtes, kurse rrafshet me Σ , Π ... me shkronjat e mëdha të alfabetit grek. $\in$

Drejtëza a është bashkësi e pikave në hapësirë P dhe nëse A është pikë prej hapësirës, atëherë ose $A \in a$ ose $A \notin a$. Poashtu, nëse $A \in a$, themi se „pika A shtrihet te drejtëza a“ ose „drejtëza a kalon nëpër pikën A“. Nëse, pra, $A \notin a$, themi se „pika A nuk shtrihet te drejtëza a“ ose „drejtëza a nuk kalon nëpër pikën A“. Paraqitja e qartë si te vizatimi 23.



Vizatimi 233

A₄. Te çdo drejtëz shtrihen pafund shumë pika. Për çdo drejtëz ekzistojnë pika që nuk i takojnë. Nëpër çdo pikë kalojnë pafund shumë drejtëza.

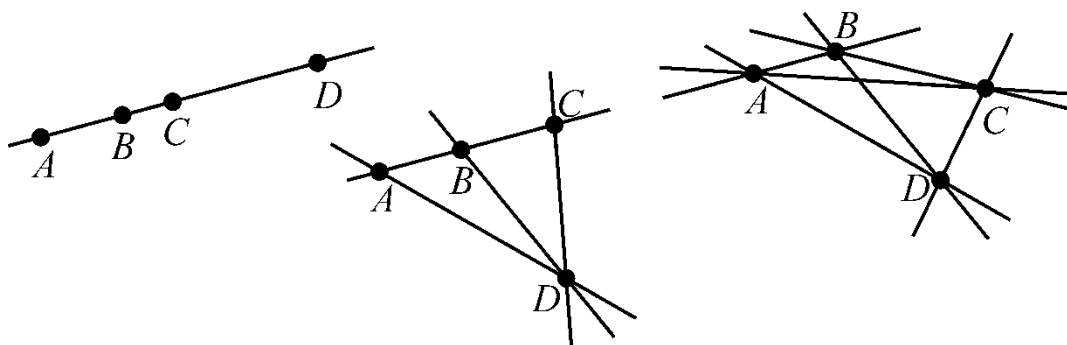
A₅. Nëpër çfarëdo dy pika të ndryshme kalon një dhe vetëm një drejtëz.

Për këtë aksiomë, në të ardhmen në vend të shenjës a për ndonjë drejtëz, mund të themi drejtëza AB, kuptohet nëse ajo drejtëz është përcaktuar me ato dy pika, d.m.th., nëse, $A, B \in a$.

Për të gjitha pikat prej hapësirës P të cilat shtrihen në drejtëzën e njëjtë do të themi se janë **pika kolineare**.

Detyra 2. Katër pika të ndryshme mund të përcaktojnë një, katër ose gjashtë drejtëza. Vërteto!

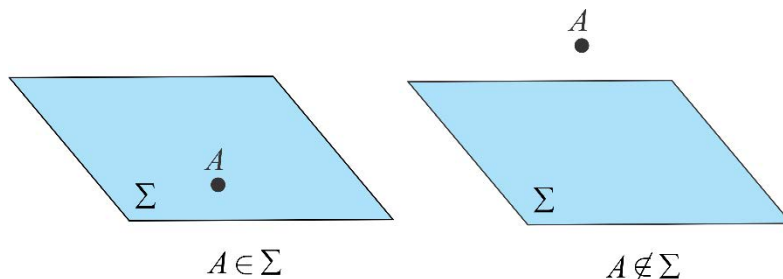
Zgjidhja. T'i shënojmë pikat me A, B, C dhe D. Nëse të gjitha katër pikat janë kolineare, atëherë ato përcaktojnë një drejtëz. Nëse tri pika prej tyre janë kolineare, për shembull, pikat A, B dhe C, atëherë çdonjëra prej tyre me D formojnë drejtëz, pra fitohen drejtëzat AD, BD dhe CD të cilat me drejtëzën AB janë gjithsej 4. Nëse çfarëdo qoftë tre prej pikave të dhëna nuk janë kolineare, atëherë mund të formojmë këto drejtëza: AB, AC, AD, BC, BD dhe CD, d.m.th., gjithsej 6 (vizatimi 24). ♦



Vizatimi 24

Rrafshi Σ është bashkësia e pikave në hapësirë (formula) dhe nëse A është pikë prej hapësirës, atëherë ose $A \in \Sigma$ ose $A \notin \Sigma$. Poashtu, nëse $A \in \Sigma$, themi se „pika A shtrihet në rrafshin Σ “

„rrafshi kalon nëpër pikën A “. Nëse, pra, $A \notin \Sigma$ themi se „pika A nuk është në rrafshin ose „rrafshi nuk kalon nëpër pikën A “. Qartë tregojmë sikurse te vizatimi 24. kalon nëpër pikën A “. Qartë tregojmë sikurse te vizatimi 24.



Vizatimi 25

A6. Në çdo rrafsh në hapësirë shtrihen pafund shumë pika, kurse për çdo rrafsh ekzistojnë pika që nuk i takojnë.

A7. Nëse pikat A , B dhe C nuk janë kolineare, atëherë ekziston një dhe vetëm një rrafsh që kalon nëpër ato pika.

Për këtë shkak kjo aksiomë, në të ardhmen në vend të shënimit për ndonjë rrafsh, mund të themi rrafshi ABC , kuptohet nëse ai rrafsh është përcaktuar me ato tri pika, d.m.th., nëse $A, B, C \in \Sigma$.

Nëse i shqyrtojmë drejtëzat dhe rrafshet si bashkësi të pikave të cilat janë nënbashkësi prej hapësirës (formula), atëherë është e natyrshme të jenë bashkësi të ndryshme të pikave, d.m.th., vizatimi të ndryshme. Te A_5 kërkojmë dy pika të ndryshme të përcaktojnë drejtëz të vetme, kurse ajo nuk do të thotë se tri pika gjithmonë do të shtrihen në drejtëzën e njëjtë. Kur ato tri pika nuk janë kolineare, do të llogarisim se përcaktojnë rrafsh të vetëm. Në këtë mënyrë sigurojmë drejtëzat dhe rrafshet të jenë bashkësi të ndryshme të pikave, të cilat, sipas A_4 dhe A_6 , janë edhe nënbashkësi të vërteta prej hapësirës (formula).

Të gjitha pikat të cilat shtihen në një rrafsh të njëjtë quhen **pika komplanare**. Sipas **A7** çdo tri pika janë komplanare.

Detyra.

1. Le të jetë A çfarëdo pikë prej hapësirës P . Vërteto se ekzistojnë pika B dhe C , të atilla që A , B dhe C nuk janë pika kolineare.

2. Le të jetë A çfarëdo pikë prej hapësirës P . Vërteto se ekziston drejtëz a e cila nuk kalon nëpër pikën A .

3. Le të jetë A çfarëdo pikë prej hapësirës P . Vërteto se nëpër A kalojnë të paktën tre rrafsh të ndryshme.

4.* Është dhënë bashkësia $S = \{A, B, C, m, n\}$, ku A , B dhe C janë tri pika të ndryshme por m dhe n drejtëza të ndryshme. Më së shumti sa rrafsh janë përcaktuar me elementet e bashkësisë S ?

5.* Te bashkësia $T = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ ekzistojnë saktë dy treshe të pikave kolineare. Më së shumti sa drejtëza mund të përcaktojnë elementet e kësaj bashkësie?

7.5. Pozita reciproke e drejtëzës dhe rrafshit në hapësirë

Le të jetë dhënë drejtëza a dhe rrafshi Σ . Le të jenë A dhe B dy pika prej drejtëzës a të cilat i takojnë rrafshit Σ . Prej aksiomave dhe teoremave të deritanishme nuk mund të përfundohet se çdo pikë prej drejtëzës a a i takon rrafshit Σ . Prandaj, do ta futim këtë aksiomë:

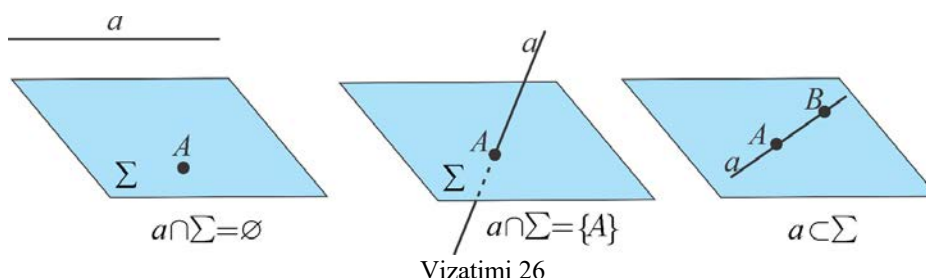
A₈. Nëse dy pika prej drejtëzës i takojnë rrafshit, atëherë edhe çdo pikë prej drejtëzës i takon rrafshit.

Prandaj, për pozitën reciproke të drejtëzës a dhe rrafshit Σ të mundshme janë këto situata (vizatimi 26):

- a dhe Σ nuk kanë pika të përbashkëta dhe themi se **drejtëza nuk e pret rrafshin** d.m.th $a \cap \Sigma = \emptyset$
- a dhe Σ kanë vetëm një pikë të përbashkët A dhe themi se drejtëza a depërton rrafshin d.m.th., $a \cap \Sigma = \{A\}$.

Në rastin e këtillë pika A quhet **pikë e depërtimit** ose prerje e drejtëzës dhe rrafshit.

- çdo pikë prej a i takon Σ dhe themi se drejtëza shtrihet në rrafsh ose rrafshi kalon nëpër drejtëzën d.m.th., $a \subset \Sigma$.



Përkufizimi. Nëse drejtëza a dhe rrafshi Σ nuk kanë pika të përbashkëta ($a \cap \Sigma = \emptyset$) ose drejtëza shtrihet te rrafshi ($a \subset \Sigma$), atëherë themi se drejtëza dhe rrafshi janë **paralel**.

Në këtë rast e shfrytëzojmë shënimin $a \parallel \Sigma$.

Në këtë rast e shfrytëzojmë shënimin $a \parallel \Sigma$.

Teorema 2. Le të jetë a drejtëz dhe $A \notin a$ është pikë prej hapësirës P . Atëherë ekziston rrafsh i vetëm i cili kalon nëpër pikën A dhe drejtëzën a .

Prej **A₄** dhe **A₅** vijon se te drejtëza a ekzistojnë dy pika B dhe C . Pasi $A \notin a$ pikat A , B dhe C nuk janë kolineare. Sipas **A₇** ato tri pika përcaktojnë rrafsh të vetëm. Drejtëza a dhe ai rrafsh kanë dy pika të përbashkëta B dhe C , pra prej **A₈** vijon se rrafshi kalon nëpër drejtëzën.

♦

Përkufizimi. Drejtëza n që e depërton rrafshin Σ dhe është normale në çdo drejtëz që kalon nëpër pikën e depërtimit quhet **normalja e rrafshit**.

Për atë drejtëz vlen vetia: nëse një drejtëz n që e depërton rrafshin është normale në dy drejtëza ku kalojnë nëpër pikën e depërtimit, atëherë ajo është normale e Σ .

Përkufizimi. Pika A dhe B le të mos shtrihen në Σ . Nëse segmenti AB ka me Σ pikë të brendshme të përbashkët, atëherë themi se pikat A dhe B janë **të ndara me rrafshin** ose se A dhe B shtrihen në anë të ndryshme të Σ .

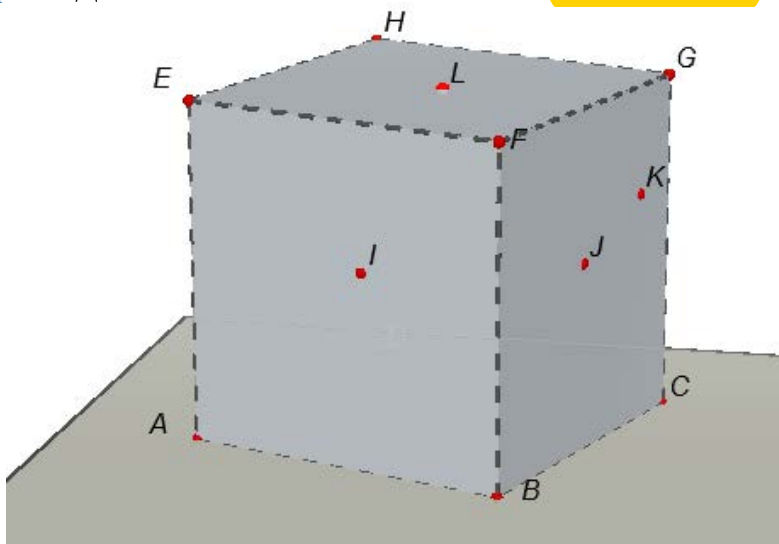
Нека $A \notin \Sigma$ и низ A е повлечена правата $p \perp \Sigma$. Ако M е прободот на p со Σ , тогаш AM се нарекува растојание од точката A до рамнината Σ .

Çdo rrafsh e ndan hapësirën në dy bashkësi jo të zbrazëta $\mathcal{P}_1$ dhe $\mathcal{P}_2$ të atilla që:

- çfarëdo dy pika prej bashkësisë së njëjtë shtrihen në anën e njëjtë prej hapësirës.
- çdonjëri $A \in \mathcal{P}_1$ dhe $B \in \mathcal{P}_2$ shtrihen në anë të ndryshme prej Σ .

Përkufizimi. Vizatimi e formuar prej një rrafshi dhe të gjitha pikave prej hapësirës të cilat shtrihen në anën e njëjtë prej atij rrafshi quhet **gjysmëhapësirë**.

Пример 1. Дадена е е коцката $ABCDEFGH$.



Точките I, J, L се пресечни точки на дијагоналите на соодветните сидови. Правата BC е паралелна со рамнината определена со A, E, H . Правата EF ја прободува рамнината BCG , а правата FG лежи во рамнината BCF . ♦

Rrafshi quhet **kufi** ose **mur** të asaj gjysmëhapësire. Mund të përfundojmë se çdo rrafsh e ndan rrafshin në dy gjysmëhapësira me mur të përbashkët.

Detyra

1. Në çfarë pozite janë drejtëzat a dhe b , nëse dihet se $b \cap \Sigma = \{M\}$ dhe $a \parallel \Sigma$?
2. Drejtëza a shtrihet në rrafshin Σ , drejtëza b e pret drejtëzën a dhe nuk shtrihet në Σ .

Cilat prej këtyre gjykimeve janë të sakta?

- a) Drejtëza b dhe rrafshi Σ kanë të paktën një pikë të përbashkët.
- b) Drejtëza b dhe rrafshi Σ kanë saktë një pikë të përbashkët.
- c) Drejtëza a dhe b përcaktojnë rrafsh të vetëm.
- ç) Drejtëza a është paralele me Σ .

3. Janë dhënë pikat A, B, C, D dhe E . Rrafshi Σ kalon nëpër pikat A dhe B , kurse nuk nëpër pikat C, D dhe E .

a) Cila prej pikave të dhëna nuk mund të shtrihet në drejtëzën AD?

b) Cila prej pikave të dhëna nuk mund të shtrihet te drejtëza CB?

4.* Janë dhënë rrafshi Σ dhe pika P jashtë rrafshit. Vërteto se drejtëza p e cila e përmban përmban pikën P nuk mund të ketë më shumë se një pikë të përbashkët.

5.* Është dhënë rrafshi Σ . Drejtëza p dhe pika A shtrihen në Σ . Vërteto se drejtëza a e cila kalon nëpër A dhe është paralele me p shtrihet në Σ .

7.6. Pozita reciproke e dy rrafsheve në hapësirë

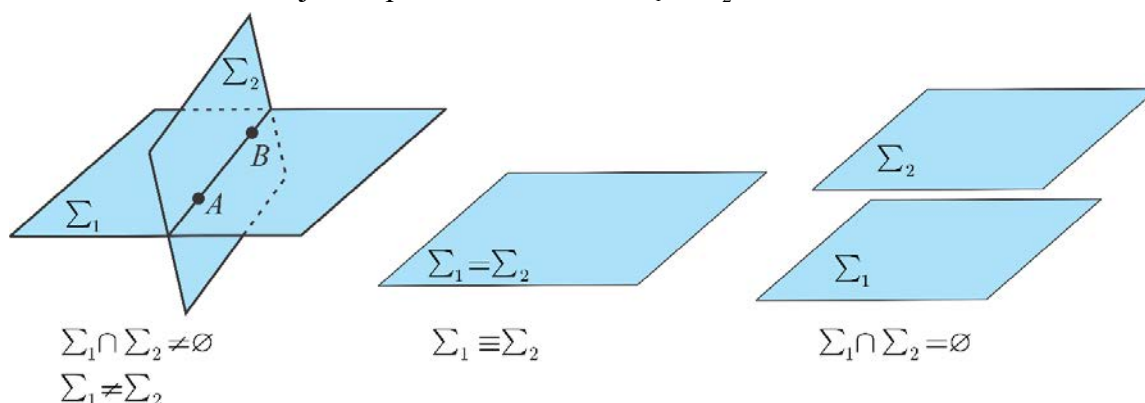
Нека Σ_1 и Σ_2 се две рамнини во просторот $\mathcal{P}$. За нивниот замен однос можни се следниве ситуации (цртеж 27):

- $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ dhe themi se rrafshet nuk kanë prerje κ
- $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ dhe themi se rrafshet përputhen d.m.th., ato janë të barabarta si bashkësi të pikave.
- $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ dhe rrafshet Σ_1, Σ_2 nuk puthiten.

Në rastin e tretë prej aksiomave të deritanishme nuk mund të përfundojmë sa pika më së paku do të ketë prerja e të dy rrafsheve, Prandaj, e futim këtë aksiomë:

A9. Nëse rrafshet Σ_1 dhe Σ_2 kanë pikë të përbashkët, atëherë ato kanë të paktën edhe një pikë të përbashkët.

Prandaj, sipas kësaj aksiome mund të përfundojmë se nëse dy rrafshe kanë pikë të përbashkët, atëherë ato kanë edhe drejtëz të përbashkët d.m.th., $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$.

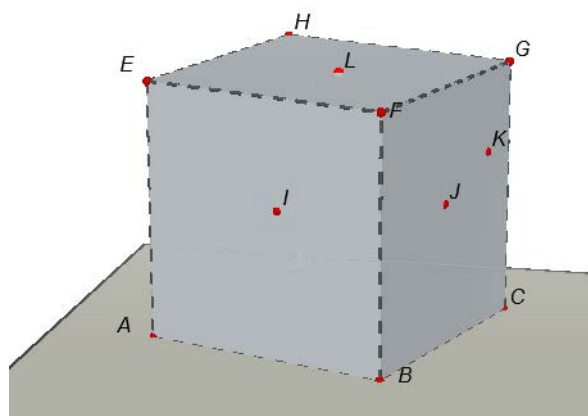


Vizatimi 27

Përkufizimi. Nëse rrafshet Σ_1 dhe Σ_2 nuk kanë pika të përbashkëta ose puthiten, atëherë themi se ato janë **paralele**.

Rrafshet paralele i shënojmë me $1 \parallel \Sigma_2$.

Shembulli 1. Është dhënë kubi $ABCDEFGH$. Pikat I, J, L janë pikëprerjet e diagonaleve të faqeve. Rrafshet IJL dhe ABE priten, rrafshet BCG dhe EHV priten në drejtëz FG . Rrafshet BCG dhe AEH janë paralele.



Detyra

1. Prerja e dy rrafshëve a mund të përbëhet prej saktë pesë pikave të ndryshme?
2. Rrafshet Σ_1 dhe Σ_2 e të priten në drejtëzën a.
 - a) A ekziston drejtëz e cila i depërton rrafshet Σ_1 dhe Σ_2 dhe nuk kanë pika të përbashkëta me drejtëzën a?
 - b) A ekzistojnë pafund shumë pika të cilat nuk shtrihen as te Σ_1 as te Σ_2 ?
3. A është e saktë ky gjykim: :
Cilat dy rrafshë që janë paralele te drejtëza e dhënë, janë paralele ndërmjet veti
- 4.* Vërteto se ekzistojnë tre rrafshë të atillë që çdonjëri dy prej tyre priten por nuk e ekziston pikë e përbashkët për të gjithë tre rrafshet.
5. Pika A nuk shtrihet në rrafsh KMN . Emërto drejtëzën e cila është prerje e rrafshëve: A KMN рамнините:
 - a) AMN dhe AKM
 - b) AMN dhe ANK .

7.7. Pozita reciproke e dy drejtëzave në hapësirë

Le të jenë a dhe b dy drejtëza të dhëna në hapësirë P. Për pozitën e tyre reciproke janë të mundshme këto situata:

- $a \cap b = \emptyset$ dhe themi se drejtëzat nuk kanë prerje
- $a \cap b = \{A\}$ dhe themi se drejtëzat priten në një pikë
- prerja përmban të paktën dy pika

Nëse prerja përmban të paktën dy pika, atëherë vlen kjo veti:

Teorema 3. Nëse dy drejtëza kanë të paktën dy pika të përbashkëta, atëherë ato puthiten.

Me të vërtetë, nëse me A dhe B i shënojmë pikat e përbashkëta të drejtëzave a dhe b. Atëherë sipas **A₅** ekziston drejtëz e vetme që kalon nëpër A dhe B. Drejtëzat a dhe b kalojnë nëpër pikat A dhe B, pra prej unitetit vijon se $a = b$. ♦

Në këtë rast themi se drejtëzat a dhe b puthiten dhe shkruajmë $a \equiv b$.

Detyra 1. Vërteto se dy drejtëza të ndryshme kanë më së shumti në pikë të përbashkët.

Zgjidhja. Nëse të dy drejtëzat kanë pika të përbashkëta, atëherë prej teoremës 3 vijon se ato drejtëza puthiten. . ♦

Teorema 4. Nëpër dy drejtëza që priten kalon një rrafsh i vetëm.

Drejtëzat a dhe b le të priten në pikën C. Dihet se te drejtëza a shtrihen pafund shumë pika, pra le të jetë $A \neq C$ një pikë e atillë. Pasi A nuk shtrihet te drejtëza b, prej teoremës 2, vijon se ekziston rrafsh i vetëm Σ që kalon nëpër A dhe b. Rrafshi Σ dhe drejtëza a kanë dy pika të përbashkëta A dhe C, pra sipas **A₈** rrafshi Σ kalon nëpër drejtëzën a. Çdo tjetër rrafsh i cili kalon nëpër tjetër pikë prej a, e cila është e ndryshme prej A dhe C, dhe nëpër drejtëzën b, gjithashtu e përmban edhe drejtëzën a. Domethënë, ai rrafsh i përmban pikën A dhe drejtëzën b, pra sipas teoremës 2 ai rrafsh puthitet me . ♦

Te vizatimi 28, a) janë drejta a dhe b priten.

Prej **A₆** vijon se për çdo rrafsh mund të zgjedh pika të cilat nuk shtrihen te ai, pra le të jenë, A, B, C dhe D katër pika të cilat nuk shtrihen te rrafshi Σ . Atëherë drejtëzat AB dhe

CD nuk shtrihen te rrafshi Σ , pasi nëse ka rrafsh që i përmban drejtëzat AB dhe CD , atëherë ai patjetër t'i përmbajë edhe pikat A, B, C dhe D . Domethënë, e saktë është kjo:

Teorema 5. Ekzistojnë drejtëza të cilat nuk shtrihen në rrafshin e njëjtë.

Kjo do të thotë se në hapësirë ekzistojnë dy situata të ndryshme të dy drejtëza që nuk priten: drejtëzat nuk shtrihen ose shtrihen në rrafshin e njëjtë.

Përkufizimi. Dy drejtëza që shtrihen në rrafshin e njëjtë dhe nuk priten ose puthiten quhen **drejtëza paralele**.

Në këtë rast shkruajmë $a \parallel b$.

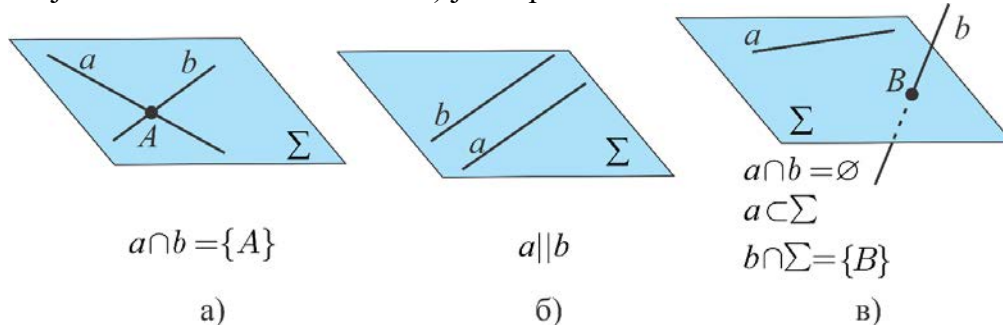
Detyra 2. Dy drejtëza të ndryshme paralele përcaktojnë rrafsh të vetëm. Vërteto!

Zgjidhja. Le të jenë $a \parallel b$ dhe $a \neq b$. Sipas **A₄** te drejtëza a ekziston pika A dhe prej $a \parallel b$ vijon se $A \notin b$. Prej teoremës 2, përfundojmë se ekziston rrafsh i vetëm që kalon nëpër drejtëzën b dhe pikën A . ♦

Te vizatimi 28, b) janë drejtëzat a dhe b janë të ndryshme dhe paralele.

Përkufizimi. Dy drejtëza që nuk shtrihen në rrafshin e njëjtë quhen **drejtëza aplanare**.

Drejtëzat a dhe b te vizatimi 28 c) janë aplanare.



Vizatimi 28

Detyra

1. Sa rrafsh përcaktojnë tri drejtëza të cilat kalojnë nëpër pikën e njëjtë?
2. Sa rrafsh përcaktojnë dy pika dhe një drejtëz e cila kalon nëpër ato pika?
3. Drejtëzat a dhe b priten në një pikë dhe shtrihen në rrafshin Σ . Drejtëza c i pret të dy drejtëzat. Vallë edhe drejtëza c patjetër të shtrihet te rrafshi Σ ?
4. A është e saktë ky gjykim:
Çfarëdo dy drejtëza që janë paralele te rrafshi i dhënë, janë paralele ndërmjet veti?
5. A mund drejtëzat aplanare a dhe b të përcaktojnë një rrafsh?

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Është dhënë gjashtëkëndëshi i rregullt $ABCDEF$ dhe $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ shpehi vektorët $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ dhe $\overrightarrow{BE}$ me ndihmën e vektorëve a dhe b .
2. Thjeshtojë shprehjen $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MP}$.

3. Thjeshtojë shprehjen $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$.

4. Cakto vektorin x prej barazimit $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{LM} - \overrightarrow{EL} + x = \overrightarrow{MK}$.

5*. Le të jetë $ABCDE$ pesëkëndësh, ku K, L, M dhe N janë meset e brinjëve BC, CD, DE dhe EA , kurse P dhe Q janë meset e KM dhe LN , përkatësisht (vizatimi 29). Vërteto se segmentet PQ dhe AB janë paralele dhe cakto raportin dhe cakto gjatësitë e tyre.

6. Vërteto se meset e segmenteve të bazave dhe prerja e diagonaleve të trapezit shtrihen në drejtëzën e njëjtë.

7. Le jetë E mesi i brinjës AB të paralelogramit $ABCD$ dhe le të jetë M është pikëprerje e AC dhe DE . Vërteto se

$$\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MC} = 1 : 2 \text{ dhe } \overrightarrow{DM} : \overrightarrow{ME} = 2 : 1.$$

8. Nëse A, B dhe C janë tri pika të ndryshme, atëherë a mund

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$?

9. Vërteto se ekzistojnë të paktën tri drejtëza të cilat nuk kalojnë nëpër pikën e njëjtë.

10. Vërteto se pesë pika të ndryshme përcaktojnë një, pesë, gjashtë, tetë ose dhjetë drejtëza.

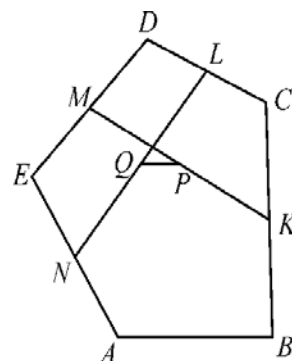
11. Le të jenë A, B, C dhe D katër pika të ndryshme në hapësirë P , prej të cilave tre nuk janë kolineare. Sa rrafshe përcaktojnë pikat e dhëna?

12. Cilat prej këtyre gjyqimeve janë të sakta?

a) rrafshi është përcaktuar me tri pika,

b) rrafshi është njëvlerësisht i përcaktuar me dy drejtëza të ndryshme,

c) rrafshi është njëvlerësisht i përcaktuar me drejtëz dhe pikë.



Vizatimi 29

8. SYPRINA DHE VËLLIMI I TRUPAVE GJEOMETRIK

Para se të fillojmë me studimin e trupave gjeometrik dhe mënyrat për njehsimin e syprinës dhe vëllimit të ato, të vërejmë shkurtimisht te koncepti trupi gjeometrik ose vetëm trup.

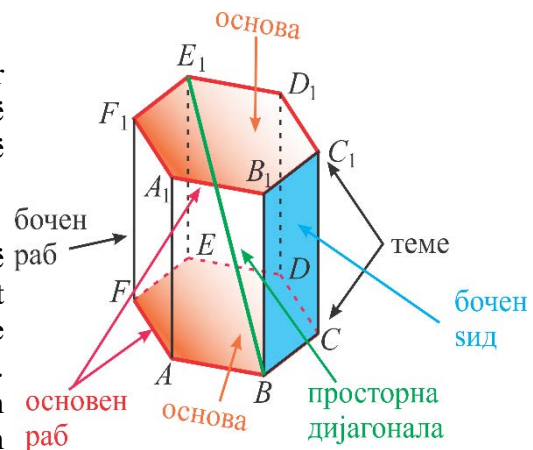
Trupi gjeometrik patjetër të jetë i kufizuar prej të gjitha anëve. Kjo do të thotë se ai nuk mund të zgjatet deri në pakufi në asnjë kahje dhe themi se është i kufizuar. Kufijtë të cilët e ndajnë pjesën prej hapësirës që e zen trupi prej pjesës tjetër, jashtë tij quhet sipërfaqja e trupit. Prandaj, trupi gjeometrik është union prej pjesës së brendshme të hapësirës dhe kufirit.

8.1. Koncepti për prizmin

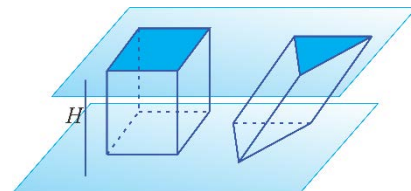
Përkufizimi. Prizmi është trup tehor gjeometrik i kufizuar me dy shumëkëndështa të puthitshëm dhe paralel dhe aq paralelogram sa kanë brinjë shumëkëndështat.

Të dy shumëkëndështat e puthitshëm që shtrihen në rrafshet paralele, quhen baza, kurse paralelogramet quhen mure **anësore** ose mure përreth të prizmit dhe për ato themi se e formojnë **mbështjellësin** e tij. Brinjët e shumëkëndështave të puthitshëm quhen tehet e bazës, kurse brinjët e paralelogramit quhen **tehe anësore** ose tehe përreth. Pikat e përbashkëta të teheve të prizmit quhen **kulme** të prizmit (vizatimi 1).

Sipas numrit të brinjëve të bazës, prizmi mund të jetë: prizëm trefaqësor (trekëndor), katërfaqësor, pesëfaqësor etj. Largësia ndërmjet bazave quhet **lartësia** e prizmit dhe shënohet me (vizatimi 2).



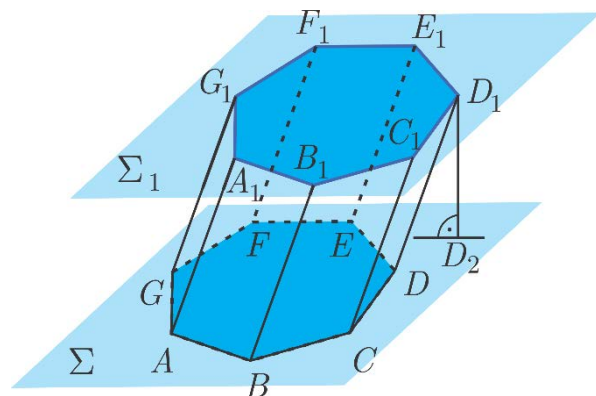
Vizatimi 1



Vizatimi 2

Shembulli 1. Te vizatimi 3 është paraqitur $\in$ prizmi shtatëfaqësor. Poashtu, Σ dhe Σ_1 janë paralele të të cilat shtrihen bazat, $ABCDEFG$ dhe $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$. Lartësia e prizmit është $\overline{D_1D_2}$ ku $D_1 \in \Sigma_1$, $D_2 \in \Sigma$ dhe $D_1D_2 \perp \Sigma$.

Faqet anësore janë ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , CDD_1C_1 , EDD_1E_1 , FEE_1F_1 , GFF_1G_1 dhe GAA_1G_1 tehet anësore AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , EE_1 , FF_1 dhe GG_1 kurse tehet e bazës AB , BC , CD , DE , EF , FG , GA , A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , D_1E_1 , E_1F_1 , F_1G_1 , G_1A_1 . ♦



Vizatimi 3

Nëse tehet anësore të prizmit janë normale në bazën, atëherë prizmi quhet **prizmi i drejtë**, kurse në rastin e kundërt ai quhet **prizmi i pjerrët**.

Prizmi i drejtë me bazë shumëkëndësh të rregullt quhet **prizmi i rregullt**.

Drejtëza e cila kalon nëpër qendrat (qendra e vijës rrethore të brendashkruar dhe qendra e vijës rrethore të jashtëshkruar) të bazat e prizmi të rregullt quhet **boshti** i prizmit (vizatimi 4).

Prizmi me bazë paralelogram quhet **paralelopiped**.

- Paralelopipedi ka faqet e kundërta reciprokisht paralele dhe të puthitshme.
- Diagonalet e paralelopipedit priten në një pikë dhe përgjysmohen te ajo.

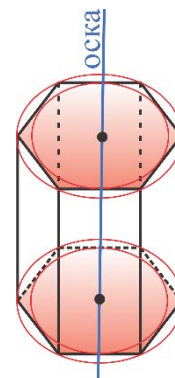
Nëse paralelopipedi është drejtkëndësh, atëherë fitohet prizmi i drejtë i cili quhet paralelopiped drejtkëndor ose **kuadër**. Nëse kuadri ka tehet e barabarta, atëherë ai quhet **kub** (vizatimi 5).

Te çdo prizëm vlen:

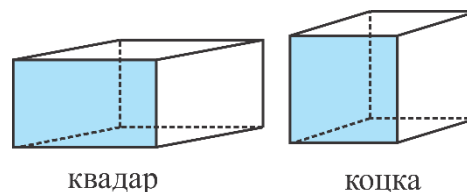
- të gjithë tehet anësore janë paralele dhe të barabarta ndërmjet veti, si segmente prej drejtëzave paralele të prera me dy rrafshet paralele
- çfarëdo dy tehet të bazës të cilët shtrihen në të njëjtën faqe anësore janë paralele dhe të barabartë.

Detyra.

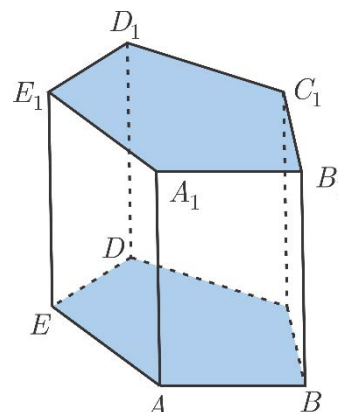
1. Sa është numri më i vogël i faqeve të një prizmi? Sa kulme dhe tehet ka ai prizëm?
2. A ekziston prizëm te i cili numri i teheve është:
 - a) 3,
 - b) 15,
 - c) 13.
3. Te vizatimi 6 është dhënë prizmi pesëfaqësor.
 - a) shkruaj të gjitha diagonalet h hapësinore hapësinore të tërhequra prej kulmeve C_1 dhe E
 - b) shkruaj diagonalet e faqeve anësore ABB_1A_1 , CC_1D_1D dhe AA_1EE_1 .
4. A ekziston prizmi te i cili numri i teheve është i barabartë me shumën e numrit të faqeve dhe kulmeve?
5. Shkruaj tre rrafshet të cilat priten në drejtëz AB , të caktuar me kulmet e prizmit prej vizatimit



Vizatimi 4



Vizatimi 5



Vizatimi 6

8.2. Prerjet e prizmit me rrafsh

Përkufizimi. Bashkësia e të gjitha pikave të përbashkëta të trupit gjeometrik dhe rrafshit quhet prerje rrafshore e trupit.

Në stereometri me interes të veçantë janë ato prerje rrafshore të cilat paraqesin shumëkëndësh. Më së shpeshti hasen këto prerje:

- **paralele**, e cila fitohet kur rrafshi është paralel me bazat e prizmit, kurse shumëkëndëshi i fituar është i puthitshëm me bazat,
- **normale**, e cila fitohet kur rrafshi është normal në tehet anësore të prizmit, kurse shumëkëndëshi i fituar ka numër të njëjtë të brinjëve me bazat,
- **diagonale**, e cila fitohet kur rrafshi kalon nëpër dy tehe anësore jofqinje, kurse shumëkëndëshi i fituar është paralelogram,
- **boshtore**, e cila fitohet kur rrafshi e përmban boshtin e prizmit, kurse shumëkëndëshi i fituar është paralelogram,
- **e pjerrtë**, nëse është normal, nuk është paralel dhe rrafshi i pret të gjitha tehet anësore të prizmit, kurse shumëkëndëshi i fituar ka numër të njëjtë të brinjëve me bazat.

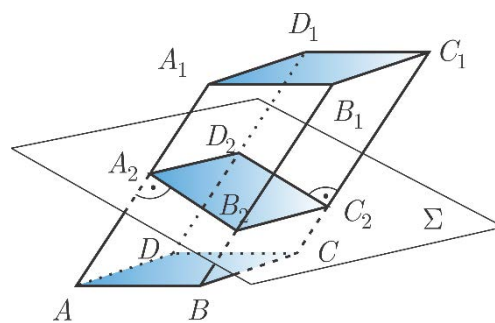
Shembulli 1.

a) Prerja normale te prizmi katërfaqësor është treguar te vizatimi 7.

b) te vizatimi 8 është treguar prerja paralele te prizmi pesëfaqësor.

c) Prerja diagonal te prizmi pesëfaqësor është treguar te vizatimi 9.

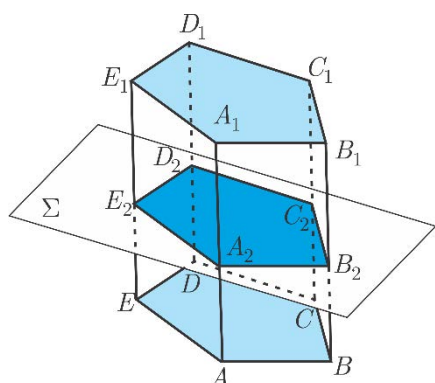
ç) te vizatimi 10 është paraqitur prerja boshtore te prizmi katërfaqësor i rregullt. Kjo prerje boshtore nuk është diagonale. ♦



нормален пресек

 $A_2B_2C_2D_2$

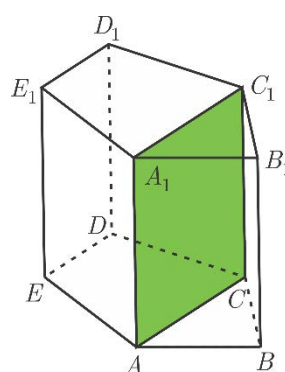
vizatimi 7



паралелен пресек

 $A_2B_2C_2D_2E_2$

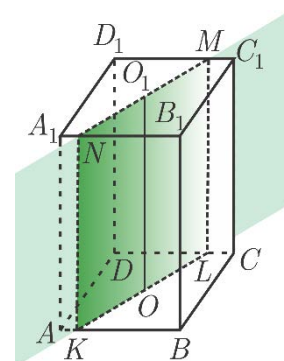
Vizatimi 8



дијагонал пресек

 ACC_1A_1

Vizatimi 9

оска OO_1 оскин пресек $KLMN$

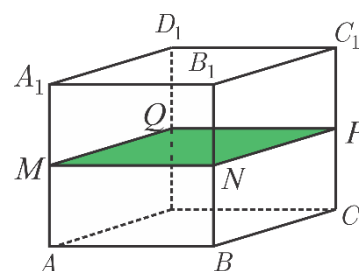
Vizatimi 10

Detyra 1. Është dhënë kubi $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ me brinjën $a = 6\text{cm}$. Njehso syprinën e:

a) prerjes paralele $MNPQ$ që kalon nëpër pikat M, N, P dhe Q , të cilët janë meset e teheve AA_1, BB_1, CC_1 dhe D_1 , përkatësisht,

b) prerja diagonale ACC_1A_1 ,

c) çfarëdo prerje e cila kalon nëpër diagonalen e bazës dhe diagonalja e dy faqeve anësore fqinje.



Vizatimi 11

Zgjidhja. a) Prerja paralele është shumëkëndësh i puthitshëm me bazën, pra në këtë rast te kubi me brinjë $a = 6\text{cm}$ dhe syprina e tij janë

$$P_1 = a^2 = 36 \text{ cm}^2 \text{ (vizatimi 11)}$$

b) Prerja diagonal te kubi është drejtkëndësh me brinjë te tehu anësor $a = 6\text{cm}$ dhe diagonalja e bazës, pra syprina e tij

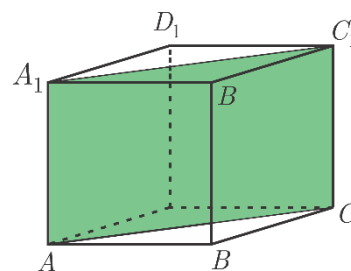
$$d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}, \text{ është}$$

$$P_2 = a \cdot d = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \text{ cm}^2 \text{ (vizatimi 12).}$$

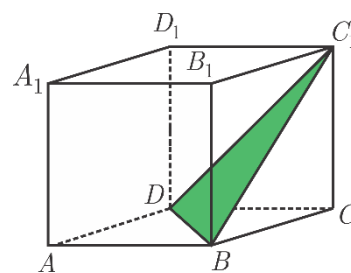
c) Prerja çfarëdo është trekëndësh barabrinjës me brinjë të barabartë me diagonalet e faqeve anësore dhe bazës, d.m.th.,

$$d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}, \text{ pra syprina e tij është}$$

$$P_3 = \frac{d^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(6\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ (vizatimi 13). } \blacklozenge$$



Vizatimi 12



Vizatimi 13

Detyra.

1. Njehso syprinën e prerjes diagonale të kuadrit me tehet e bazave 5cm dhe 12cm lartësia $c = 10\text{cm}$.

2. Njehso tehet e bazave të kuadrit te i cili syprina e bazës është 48cm^2 , syprina e prerjes diagonale është 150cm^2 dhe lartësia është 15cm .

3. Lartësia e një paralelopipedi të drejtë është 30cm , kurse baza është romb me brinjë 13cm dhe diagonal të bazës të cilat qëndrojnë si $5:12$. Njehso syprinën e prerjeve diagonale.

4. Njehso syprinën e prerjes prej ABC_1D_1 figurës 12, detyra 1 b). ${}_{11}ABCD$

5. Njehso syprinën e prerjes prej BDD_1 figurës 13, detyra 1 c). ${}_{1}BDD$

8.3. Syprina dhe vëllimi i prizmit

Syprina e prizmit

Përkufizimi. Syprina e një prizmi është shuma prej syprinave të dy bazave dhe syprinave të shumëkëndëshave të cilët e përbëjnë mbështjellësin e prizmit.

Nëse syprinën e prizmit e shënojmë me S , syprinën e bazës me B dhe syprinën e mbështjellësit me M , atëherë $P = 2B + M$

Poashtu, nëse prizmi është i drejtë, faqet e tij janë drejtkëndësha. Çdo drejtkëndësh ka një brinjë e cila është edhe tehu i bazës, kurse brinja tjetër lartësia e prizmit H . Prandaj, syprina e mbështjellësit është prodhim prej perimetrit të bazës dhe lartësisë, d.m.th., $M = P \cdot H$.

Nëse, pra, prizmi është i pjerrët, atëherë faqet e tij janë paralelograme, pra syprina e mbështjellësit është shuma prej syprinave të atyre paralelogrameve. Syprina e çdo paralelogrami është prodhim prej brinjës së tij dhe lartësia përkatëse e lëshuar kah ajo brinjë.

Detyra 1. Njehso syprinën e kuadrit me brinjë a, b dhe c .

Zgjidhja. Baza është drejtkëndësh me brinjë a dhe b , pra $B = ab$. Faqet anësore janë drejtkëndësha dhe atë dy prej tyre me brinjë a dhe c , kurse të tjerat me brinjë b dhe c , pra $M = 2ac + 2bc$ (vizatimi 14). Prandaj,

$$P = 2B + M = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + bc + ca). \blacklozenge$$

Kubi dhe kuadri me tehe të barabarta, pra $B = a^2$ dhe $M = 4a^2$ d.m.th., $S = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$.

Detyra 2. Njehso syprinën e prizmit trefaqësor të rregullt me tehun e bazës a dhe lartësinë H

Zgjidhja. Bazat e prizmit janë dy trekëndësha barabrinjës (vizatimi 15) syprina e të cilit është

$$B = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Mbështjellësi përbëhet prej tre drejtkëndëshave me brinjë a dhe H , Prandaj, syprina e mbështjellësit është $M = 3aH$, kurse syprina e gjithë prizmit do të

ë jetë:
$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 3aH. \blacklozenge$$

Detyra 3. Njehso syprinën e prizmit katërfaqësor me bazën romb diagonalet e të cilit janë $d_1 = 8\text{cm}$ dhe $d_2 = 6\text{cm}$ dhe lartësia $H = 10\text{cm}$.

Zgjidhja. Syprinën e bazave do ta njehsojmë me formulën për syprinën e rombit:

$$B = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ cm}^2. \text{ Mbështjellësi i prizmit përbëhet prej katër drejtkëndëshave}$$

brinjët e të cilit janë lartësia e prizmit H dhe tehu i bazës, përkatësisht brinjë e rombit a . Për ta njehsuar brinjën e rombit do ta zbatojmë teoremën e Pitagorës (vizatimi 16).

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 16 + 9 = 25,$$

prej ku $a = 5\text{cm}$. Syprina e mbështjellësit është:

$$M = 4aH = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2 \text{ pra syprina e prizmit është:}$$

$$P = 2B + M = 2 \cdot 24 + 200 = 248 \text{ cm}^2. \blacklozenge$$

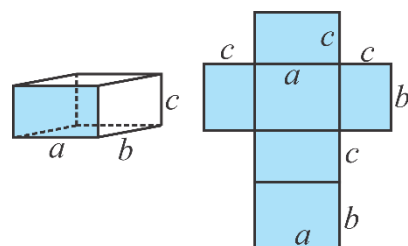
Detyra 4. Njehso syprinën e prizmit gjashtëfaqësor të rregullt tehet e të cilit janë të gjitha të barabarta dhe kanë gjatësi 8 cm .

Zgjidhja. Sipas figurës 17 bazat e prizmit janë gjashtëkëndësha të rregullt, syprina e të cilit është shuma e 6 trekëndëshave barabrinjës, përkatësisht

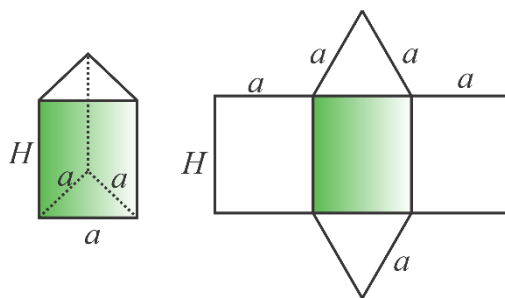
$$B = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2, \quad B = 96\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Mbështjellësi i prizmit përbëhet prej 6 katrorëve, sipas të cilit syprina e mbështjellësit të prizmit

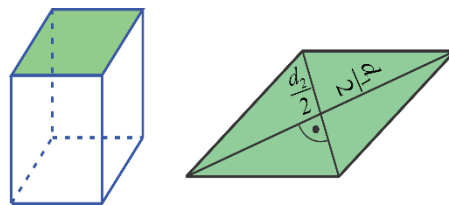
$$M = 6 \cdot 8^2 = 384 \text{ cm}^2, \text{ pra syprina e prizmit është:}$$



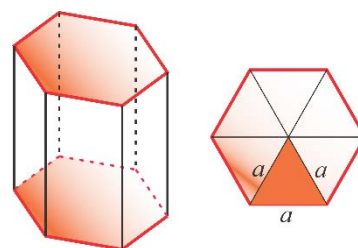
Vizatimi 14



Vizatimi 15



Vizatimi 16



Vizatimi 17

$$P = 2B + M = 2 \cdot 96 \sqrt{3} + 384 = 192(2 + \sqrt{3} \text{ cm}^2) . \blacklozenge$$

Vëllimi i prizmit

Koncepti vëllim i trupit gjeometrik tanimë e keni mësuar. Është e njohur se çdo trup i ngurtë zen pjesë prej hapësirës të cilat gjenden, si për shembull, guri, ndërtesa, dardha etj. Lëngjet (lëngu, uji, era, nafta etj.) gjithashtu zënë pjesë prej hapësirës, kurse forma e tyre varet prej enës në të cilën është venduar. Së pari do të përkujtohemi në disa karakteristika të rëndësishme të vëllimit. Ai është numër pozitiv, vizatimi të puthitshme h hapësinore (trupa) kanë vëllime të barabarta, nëse një trup mund të ndahet në pjesë të cilat nuk priten, atëherë vëllimi i tij është shumë prej vëllimeve të tyre dhe kubi me brinjë 1m e ka vëllimin 1m³. Njësia themelore e masës për vëllimin është 1m³, kurse masat tjera janë: dm³, cm³, mm³, km³...

Gjatë punës me konceptin vëllim të trupit, rol më të rëndësishëm luan **Principi i Kavalierit**: Nëse dy trupa mund të vendosen ashtu që prerjet e tyre me çfarëdo rrafsh paralel me rrafshin e dhënë kanë syprina të barabarta, atëherë ato dy trupa kanë vëllime të barabarta.

Vëllimi i prizmit njehsohet me formulën $V = B \cdot H$, ku B është syprina e bazës, kurse H lartësia e prizmit.

Detyra 5. Njehso vëllimin e kuadrit me brinjë a , b dhe c .

Zgjidhja. Baza e kuadrit e ka syprinën $B = ab$, pra $V = B \cdot H = abc$. $\blacklozenge$

Kubi dhe kuadri me tehe të barabartë, pra $V = a^2 a^3 = a^5$.

Detyra 6. Njehso vëllimin e prizmit trefaqësor të rregullt me tehun e bazës $a = 6\text{cm}$ dhe lartësia $H = 9\text{cm}$.

Неговата площина е $B = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ или $B = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Според тоа, волуменот на столбот е $V = 9\sqrt{3} \cdot 9 = 81\sqrt{3} \text{ cm}^3$. $\blacklozenge$

Detyra 7. Njehso vëllimin e prizmit gjashtëfaqësor të rregullt me tehun e bazës $a = 6\text{cm}$ dhe lartësinë $H = 12\text{cm}$.

Zgjidhja. Pasi $B = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$, pra $V = 54\sqrt{3} \cdot 12 = 648\sqrt{3} \text{ cm}^3$ (vizatimi 17). $\blacklozenge$

Detyra 8. Sa shtylla të betonit mund të mbushen me beton 130m³, nëse lartësia e një shtylle është 1,6m por baza është katror me brinjë 20cm?

Zgjidhja. Vëllimi i një shtylle është $P = 2B + M = 2 \cdot 24 + 200 = 248 \text{ cm}^2$. Numri i kërkuar i shtyllave është $130 : 0.064 \approx 2031$. $\blacklozenge$

Detyra 9. Syprina anësore e paketimit të barit është zbërthye në rrafsh dhe është fituar kuadër me syprinë 81cm³. Paketimi e ka formën e prizmit trefaqësor të rregullt. Njehso vëllimin e kutisë.

Zgjidhja. Për shkak $3aH = 81$ dhe $3a = H$ fitojmë dhe $H = 9\text{cm}$ dhe $a = 3\text{cm}$. Vëllimi është.

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} H = \frac{81\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3 . \blacklozenge$$

Detyra

1. Baza e prizmit të drejtë është trapez barakrahas me baza 14 cm dhe 4 cm dhe lartësi 13 cm. Lartësia e prizmit është 15 cm. Njehso vëllimin e prizmit.
2. Baza e prizmit të drejtë është romb me diagonale 3 cm dhe 4 cm dhe diagonalja e faqes anësore 6,5 cm. Njehso syprinën dhe vëllimin e prizmit.
3. Nëse prej pjesës së brendshme të kubit janë larguar kubi më i vogël fitohet kubi i zbrazët. Sa është vëllimi i kubit të zbrazur, nëse tehu i kubit të brendshëm është një e treta prej tehut të kubit të jashtëm?
4. Tehet e bazës së kuadrit qëndrojnë si 4:3, kurse lartësia e tij është 15 cm. Njehso vëllimin e kuadrit, nëse perimetri i bazës është 21 cm.
5. Baza e një paralelopipedi është paralelogram një diagonale e të cilit është 17 cm, kurse brinjët janë 9 cm dhe 10 cm dhe syprina e paralelopipedit është 334 cm². Njehso vëllimin e paralelopipedit.

8.4. Piramida. Prerjet e piramidës me rrafsh

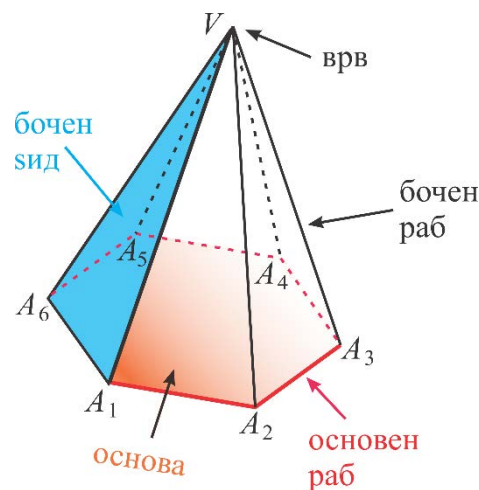
Përkufizimi. Piramida është trup tehor e kufizuar me një shumëkëndësh dhe aq trekëndësha sa ka brinjë shumëkëndëshi.

Shumëkëndëshi $A_1A_2\dots A_n$ quhet **baza** e piramidës. Trekëndëshat A_1A_2V , A_2A_3V , A_3A_4V , ..., $A_{n-1}A_nV$ të cilët aq sa ka brinjë shumëkëndëshi, quhet **faqe anësore** e piramidës dhe së bashku e formojnë **mbështjellësin** e piramidës. Kulmi i përbashkët i të gjithë faqeve anësore të piramidës quhet **majë**.

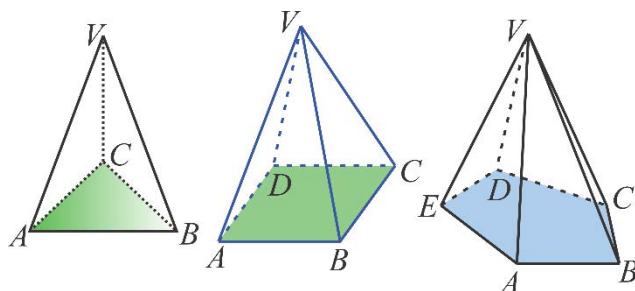
Brinjët e shumëkëndëshit

$$A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_nA_1$$

quhen **tehet e bazës**, kurse brinjët e trekëndëshit quhen **tehe anësore** ose tehe përreth (vizatimi 18).



Vizatimi 18

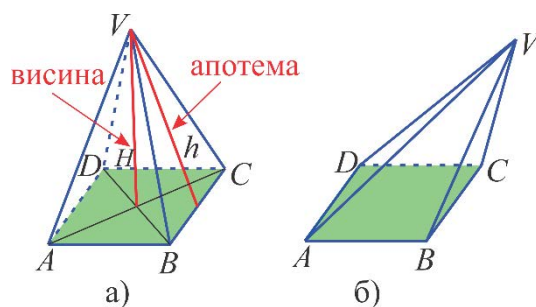


Vizatimi 19

Varësisht prej teheve të bazave (çfarë shumëkëndëshi është baza e piramidës), ngjashëm sikurse te prizmi, piramida mund të jetë: trefaqësore, katërfaqësore, pesëfaqësore, ... (vizatimi 19). Piramida trefaqësore quhet edhe **tetraedër**.

Nëse tehet anësore të piramidës janë të barabarta, ajo quhet piramidë e drejtë (vizatimi 20, a)), kurse në rastin e kundërt, ajo është **piramida e pjerrët** (vizatimi 20, b)).

Piramida e drejtë me bazë shumëkëndësh i rregullt quhet piramida e rregullt. Tetraedri te i cili të gjitha tehet ndërmjet veti janë të barabarta quhet **tetraedër i rregullt**. Të gjitha faqet e



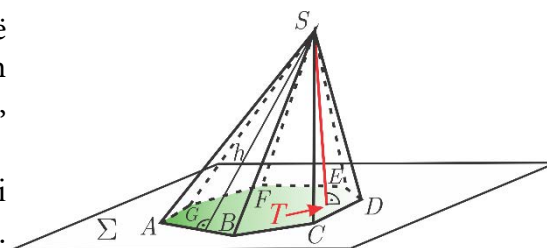
tetraedrit të rregullt janë ndërmjet veti trekëndësha barabarinjës të puthitshëm. Largësia prej majës deri

te baza e piramidës quhet **lartësia** e piramidës H. Lartësia e faqes anësore e lëshuar prej majës së piramidës quhet lartësia anësore h (vizatimi 20, a)). Drejtëza e cila kalon nëpër majën e piramidës së rregullt dhe nëpër qendrën e bazës së saj quhet **boshti i piramidës**.

Te piramida e rregullt të gjitha lartësitë anësore janë të barabarta. Atëherë lartësia anësore quhet **apotemë** (vizatimi 20, a)). Rënza e lartësisë së piramidës është në qendrën e vijës rrethore të jashtëshkruar te baza, e cila puthitet me qendrën e vijës rrethore të brendashkruar te baza.

Shembulli 1. Te vizatimi 21 është paraqitur piramida shtatëfaqësore me bazën ABCDEFG e cila shtrihet në rrafshin Σ , maja S, lartësia (formula) (ku $T \in \Sigma$), faqe anësore

ABC, BCS, CDS, DES, EFS, GFS dhe AGS, si edhe lartësia anësore h e faqes ABS. Poashtu, tehet anësore janë AS, BS, CS, DS, ES, FS dhe GS por tehet e bazës janë



Vizatimi 21

AB, BC, CD, DE, EF, FG dhe GA. ♦

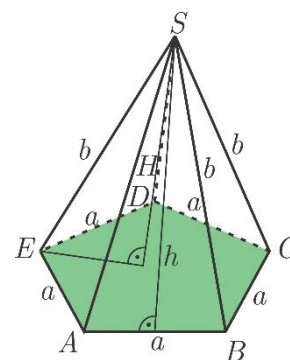
Më tutje do t'i shqyrtojmë vetëm piramidat e drejta, d.m.th., me piramidë do të nënkuptojmë piramidë të drejtë.

Shembulli 2. Te vizatimi 22 është paraqitur piramida pesëfaqësore me tehun e bazës a, tehun anësor b, apotema h dh lartësia H. Nëse është e njohur se apotema $h = 24\text{cm}$, kurse tehu anësor $b = 26\text{cm}$, atëherë me ndihmën e teoremës së Pitagorës mund të caktohet gjatësia e tehut. Prej kësaj që të gjitha faqet anësore të piramidës janë trekëndësha barakrahas, vijon se apotema e përgjysmon tehun e bazës, d.m.th.,

$$\frac{a}{2} = \sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10\text{cm}, \text{ pra } a = 20\text{cm}. \blacklozenge$$

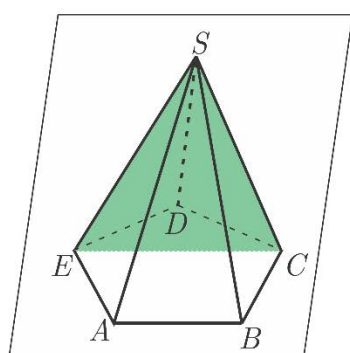
Prejra e piramidës me rrafsh (vizatimi 23) quhet:

- **diagonale** nëse rrafshi kalon nëpër dy tehe anësore që nuk shtrihen në faqen anësore të njëjtë. Kjo prerje është trekëndësh.
- **paralele**, nëse rrafshi i pret të gjitha tehet anësore, nuk kalon nëpër majën, dhe është paralele me rrafshin e bazës. Ai është shumëkëndësh i ngjashëm me bazën.

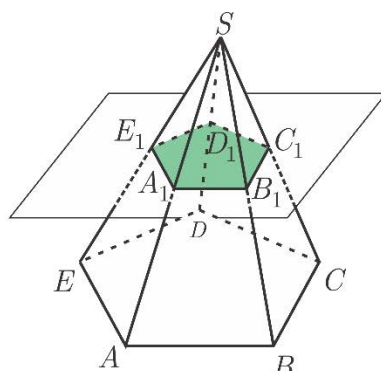


Vizatimi 22

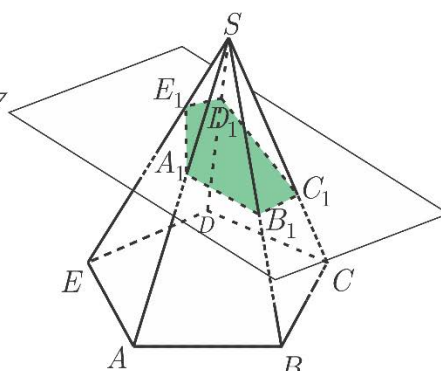
- **anësore** (ose **i pjerrët**). Nëse rrafshi i pret të gjitha tehet anësore, nuk kalon nëpër majën, dhe nuk është paralel me rrafshin e bazës. Ai është shumëkëndësh me numër të njëjtë të brinjëve me bazën.



дијагонален пресек
 ECS



паралелен пресек
 $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$
Vizatimi 23



кос пресек
 $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$

Gjatë prerjes paralele të piramidës me rrafshin vlen kjo teoremë:

Teorema 1. Nëse një piramidë e presim me rrafsh paralel me bazën, atëherë:
 -shumëkëndëshi që është prerje është i ngjashëm me shumëkëndëshin e bazës,
 -tehet anësore dhe lartësia janë ndarë në raport të njëjtë,
 -syprinat e bazës dhe prerjes qëndrojnë sikurse katrorët e largësive të tyre deri te maja.

Me të vërtetë, prej paralelizmit të segmenteve përkatëse (vizatimi 24) vijon se shumëkëndëshat kanë kënde përgjegjëse të barabarta si kënde me krah përkatësisht paralel. Prej ngjashmërisë së trekëndëshave A_1A_2S и B_1B_2S , ..., A_nA_1S dhe B_nB_1S vijon se

$$\overline{A_1A_2} : \overline{B_1B_2} = \overline{A_2A_3} : \overline{B_2B_3} = \dots = \overline{A_{n-1}A_n} : \overline{B_{n-1}B_n} = \overline{A_nA_1} : \overline{B_nB_1}.$$

Prandaj, shumëkëndëshat $A_1A_2\dots A_n$ dhe $B_1B_2\dots B_n$ janë të ngjashëm.

Dihet se syprinat e trekëndëshave të ngjashëm qëndrojnë sikurse katrorët e brinjëve përkatëse, pra lehtë fitohet vërtetimi i gjykimit të teoremës. ♦

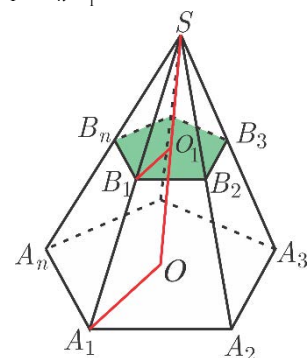
Detyra 1. Njehso syprinën e prerjes paralele të piramidës, nëse syprina e bazës është 80cm^2 , kurse rrafshi i prerjes kalon nëpër mesin e lartësisë.

Zgjidhja. Nëse lartësia e piramidës është H , kurse lartësia prej prerjes deri te maja H_1 , atëherë $\frac{H_1}{H} = \frac{1}{2}$. Prej teoremës vijon

se $\frac{B_1}{B} = \frac{H_1^2}{H^2} = \frac{1}{4}$ t.e. $B_1 = \frac{1}{4}B = \frac{1}{4} \cdot 80 = 20\text{cm}^2$. ♦

Detyra

1. Cakto gjatësinë e apotemës te piramida katërfaqësore e rregullt, me tehun e bazës $a = 6\text{cm}$ dhe tehun anësor $s = 10\text{cm}$.



Vizatimi 24

2. Cakto syprinën e bazës së piramidës, nëse prerja paralele e ka syprinën $B = 25\text{cm}$ kurse rrafshi i prerjes është në largësi $\frac{1}{4}$ prej lartësisë së matur prej majës së piramidës.

3. Cakto lartësinë e piramidës së rregullt katërfaqësore, me tehun e bazës 14 cm dhe tehun anësor 20 cm.

4. Njehso lartësinë e piramidës së rregullt gjashtëfaqësore, nëse një prerje diagonale e tij e ka syprinën 60cm^2 dhe kalon nëpër qendrën e bazës, kurse tehu anësor e ka gjatësinë 13 cm.

5. Njehso syprinën e prerjes së fituar prej tetraedrit të rregullt me tehun e bazës 5 dm, e prerë me rrafsh që kalon nëpër lartësinë e bazës dhe majës.

8.5. Syprina dhe vëllimi i piramidës

Përkufizimi. Syprina e piramidës është e barabartë me shumën e syprinave të bazës dhe të gjithë trekëndëshave të cilët e përbëjnë mbështjellësin e piramidës.

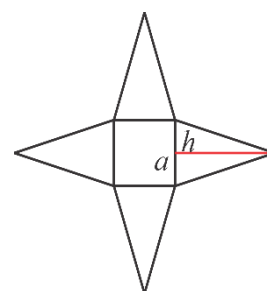
Nëse me S e shënojmë syprinën e piramidës, kurse me B syprinën e bazës së saj, kurse me M syprinën anësore, atëherë $S = B + M$.

Detyra 1. Njehso syprinën e piramidës katërfaqësore të rregullt.

Zgjidhja. Baza e piramidës është katror syprina e të cilit është $B = a^2$

Mbështjellësi nërrehet prej katër trekëndëshave barakrahas dhe syprina e tij është $M = 4 \frac{ah}{2}$. Prandaj, syprina e piramidës është

$$P = a^2 + 4 \frac{ah}{2} \quad (\text{Vizatimi 25}). \spadesuit$$



Vizatimi 25

Detyra 2. Njehso syprinën e:

a) piramidës trefaqësore të rregullt

b) piramidës gjashtëfaqësore të rregullt

Zgjidhja.

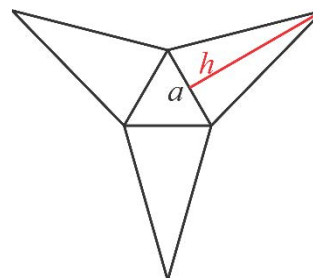
a) Baza e piramidës së rregullt trefaqësore është trekëndësh barabrinjës syprina e të

të cilit është $B = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. syprina e

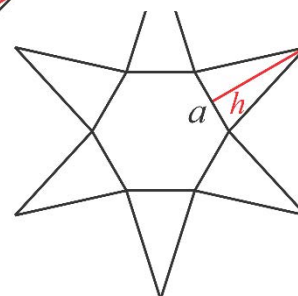
mbështjellësit është $M = 4 \frac{ah}{2}$, domethënë

syprina e piramidës është $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \frac{ah}{2}$

(vizatimi 26 a).



a)



b)

Vizatimi 26

b) Baza e piramidës gjashtëfaqësore e rregullt syprina e të cilit është $B = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$ syprina e mbështjellësit është shuma prej syprinave të gjashtë

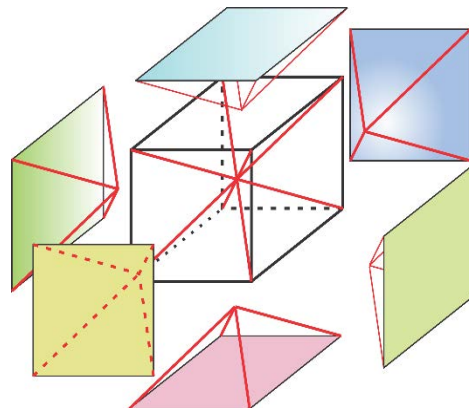
trekëndëshave barakrahas: $M = 6 \frac{ah}{2}$ ose $M = 3a$. Prandaj, syprina e piramidës gjashtëfaqësore

$$\text{është: } P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah. \blacklozenge$$

o` të shqyrtojmë një kub me brinjën  $a$  (vizatimi 27) e` a` janë tërhequr diagonalet hapësinore të cilat priten në qendrën O të kubit. Gjysma prej tyre janë tehe anësore të gjashtë piramidave katërfaqësore me majë O baza e të cilave janë faqet e kubit. Pasi piramidat janë të njëjta, vëllimi i tyre është një e gjashtë prej vëllimit të kubit:

$V = \frac{1}{6}a^3$. Lartësia e atyre 6 piramidave është gjysma prej brinjës së kubit, përkatësisht $H = \frac{1}{2}a$. Prandaj, vëllimi i çdonjërës është piramida mund të shkruhet edhe në tjetër mënyrë:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}a \cdot a^2}_H, \quad V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H \quad \text{или} \quad V = \frac{1}{3}B \cdot H, \quad \text{каде}$$



Vizatimi 27

Vëllimi i çdo piramide njehsohet me formulën syprina e bazës, kurse H është lartësia e piramidës.

$$V = \frac{B \cdot H}{3}, \text{ ku } B \text{ është}$$

Shembulli 1. Piramida trefaqësore e rregullt, me tehun e bazës 6 cm dhe lartësia

12 cm e ka vëllimin

$$V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{\frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 12}{3} = 36\sqrt{3}\text{cm}^3. \blacklozenge$$

Detyra

1. Njehso vëllimin e piramidës baza e të cilës është trapez barakrahas me bazat 8 cm krahun 5 cm, kurse lartësia 20 cm.

2. Te piramida katërfaqësore e rregullt vlen $M = 20\text{dm}^2$ dhe $B = 16\text{dm}^2$. Cakto gjatësinë e apotemës h .

3. Vëllimi i piramidës gjashtëfaqësore e rregullt është 6cm^3 . Nëse tehu i bazës është 1 cm, gjej lartësinë e tehut anësor të piramidës.

4. Piramida trefaqësore me lartësi 12 cm ka për bazë trekëndësh barakrahas me bazë 5 cm e të cilit është dhe krahu 6,5 cm. Njehso vëllimin e piramidës.

5. Njehso vëllimin e piramidës e cila ka bazë të njëjtë me prizmin gjashtëfaqësor të rregullt, kurse maja e ka në qendrën e bazës tjetër të prizmit, tehu i bazës të të cilës është $a = 5\text{cm}$ dhe lartësia $H = 9\text{cm}$.

6. Të njehsohet vëllimi i piramidës, baza e të cilës është drejtkëndësh me brinjë 8 cm dhe 6 cm, nëse çdo teh anësor është 13 cm.

8.6. Syprina dhe vëllimi i piramidës së cinguar

Përkufizimi. Pjesa e piramidës e kufizuar me bazën e saj dhe një prerje paralele quhet piramida e cinguar.

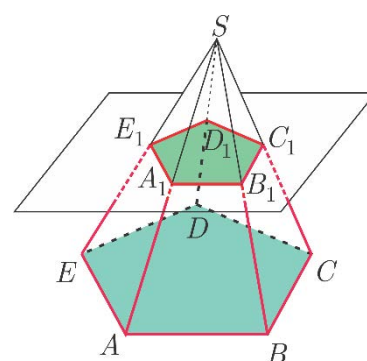
Poashtu, te piramida e cinguar, faqet paralele quhen **baza**, kurse brinjët tjera quhen **faqet anësore (anët)**.

Brinjët e bazave janë **tehet e bazës**, kurse tehet e tjera të cilat nuk janë të bazës quhen **anësore**. Faqet anësore e formojnë **sipërfaqen anësore ose mbështjellësin** të piramidës së cinguar.

Piramida e cinguar quhet **e rregullt** nëse është fituar si prerje paralele e piramidës së rregullt. Te piramida e rregullt e cinguar faqet anësore janë trapeze barakrahas të puthitshëm.

Shembulli 1. Te vizatimi 28 është paraqitur piramida

pesëfaqësore e cinguar me bazat $ABCDE$ $A_1B_1C_1D_1E_1$, tehet e bazës $AB, BC, CD, DE, EA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1$ dhe E_1A_1 tehe anësore $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1$ dhe faqet anësore $ABB_1A_1, BCC_1B_1, CC_1D_1D, DD_1E_1E, EE_1A_1A$. ♦



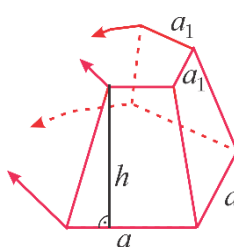
потсечена пирамида
 $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$

Vizatimi 28

Nëse me S e shënojmë syprinën e piramidës së cinguar, B është syprina e bazës më të madhe, kurse B_1 syprina e prerjes, atëherë $P = B + B_1 + M$, ku M është syprina anësore.

Për syprinën anësore të piramidës së rregullt të cinguar vlen:

Teorema. Syprina anësore e piramidës së rregullt të cinguar është e barabartë me prodhimin e gjysmëshumës së perimetrit të dy bazave dhe lartësia anësore (apotema).



Vizatimi 29

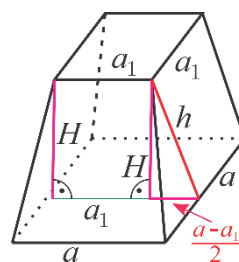
Nëse shqyrtojmë një piramidë të rregullt n -faqësore të cinguar me tehe a dhe a_1 dhe apotemën h . Atëherë syprina e një faqe anësore

(prej syprinës së trapezit barakrahas) është $\frac{a + a_1}{2} h$. Pasi faqet

anësore të piramidës së rregullt të cinguar janë trapeza të puthitshëm, syprina M e mbështjellësit:

$$M = n \frac{a + a_1}{2} h = \frac{na + na_1}{2} h = \frac{L + L_1}{2} h.$$

Shembulli 2. Syprina e piramidës katërfaqësore e rregullt e cinguar me tehet e bazës $a = 18$ cm dhe $a_1 = 8$ cm dhe lartësi $H = 12$ cm është



Vizatimi 30

$$P = a^2 + a_1^2 + 4 \cdot \frac{a + a_1}{2} \cdot h = 1024 \text{ cm}^2, \text{ бидејќи } h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a - a_1}{2}\right)^2} = 13 \text{ cm (цртеж 30)}. \blacklozenge$$

Formula për vëllimin e piramidës së cinguar nxirret duke pasur parasysh se vëllimi i piramidës së cinguar paraqet ndryshimin e vëllimit të dy piramidave, e plota dhe e prera.

Teorema. Nëse lartësia e piramidës së cinguar është H , kurse syprinat e bazave janë B dhe B_1 , atëherë vëllimi i saj është:

$$V = \frac{H}{3} (B + \sqrt{BB_1} + B_1).$$

Me të vërtetë, është dhënë çfarëdo piramidë të cinguar $ABC...FA_1B_1C_1...F_1$ (vizatimi 31). Nëse i vazhdojmë tehet anësore deri te pikëprerja e tyre S , fitohen dy piramida $SABC...F$ dhe $SA_1B_1C_1...F_1$ dhe bazat e të cilave janë baza e poshtme dhe e sipërme e piramidës së cinguar me syprina B dhe B_1 . Lartësitë e piramidave të fituara janë SO dhe SO_1 me gjatësi

$$\overline{SO_1} = x, \overline{SO_2} = H + x.$$

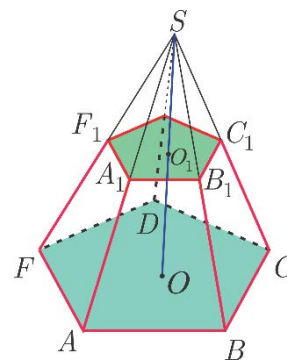
$$\text{Atëherë } V = \frac{1}{3} B(H + x) - \frac{1}{3} B_1 x, V = \frac{1}{3} BH + \frac{1}{3} (B - B_1)x$$

Prej këtu madhësia e panjohur x do të caktohet duke shfrytëzuar teoremën për prerje paralele te piramida, përkatësisht

$$\frac{B}{B_1} = \frac{(H + x)^2}{x^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}} = \frac{H + x}{x}, x = \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1}$$

$$V = \frac{1}{3} BH + \frac{1}{3} (B - B_1) \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1} = \frac{1}{3} BH + \frac{1}{3} H (\sqrt{BB_1} + B_1) = \frac{H}{3} (B + \sqrt{BB_1} + B_1)$$

$$V = \frac{H}{3} (B + \sqrt{BB_1} + B_1).$$



Vizatimi 31

Vëllimi i piramidës trefaqësore të rregullt të cinguar: $V = \frac{H\sqrt{3}}{12} (a^2 + aa_1 + a_1^2).$

Vëllimi i piramidës katërfaqësore të rregullt të cinguar: $V = \frac{H}{3} (a^2 + aa_1 + a_1^2).$

Detyra 1. Gjej syprinën e piramidës së rregullt të cinguar nëse janë dhënë apotema $h = 6\text{cm}$, tehet e bazave $a = 4\text{cm}$ dhe $a_1 = 2\text{cm}$ dhe piramida e rregullt e cinguar është:

a) trefaqësore, b) katërfaqësore.

Zgjidhja. Për piramidën e rregullt të cinguar kërkojmë:

a) $P = B + B_1 + M = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + a_1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \left(\frac{a + a_1}{2} \right) \cdot h = (54 + 5\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

b) $P = B + B_1 + M = a^2 + a_1^2 + 4 \left(\frac{a + a_1}{2} \right) \cdot h = 92 \text{ cm}^2. \blacklozenge$

Detyra 2. Gjej lartësinë e piramidës katërfaqësore të rregullt të cinguar, nëse është dhënë vëllimi $B = 304\text{cm}^3$ dhe tehet e bazave $a = 6\text{cm}$ dhe $a_1 = 4\text{cm}$.

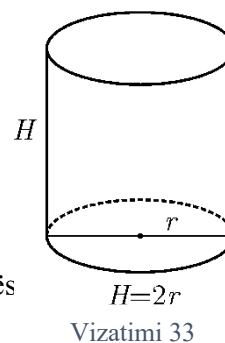
Nëse $OO_1 \perp \Sigma$, atëherë cilindri quhet **i drejtë**, kurse në të kundërtën **i pjerrët**.

Te vizatimi 32 është paraqitur cilindri me gjeneratrisën me gjatësi s , lartësia H , rrezja r dhe boshti OO_1 .

Te cilindri i drejtë $s = H = \overline{OO_1}$.

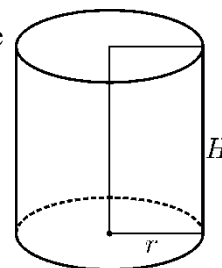
Nëse diametri i bazës është i barabartë me lartësinë e cilindrit të drejtë, atëherë cilindri quhet **barabrinjës**. Domethënë, te cilindri barabrinjës vlen $H = 2r = d$.

Te vizatimi 33 është paraqitur cilindër barabrinjës me lartësi H dhe rreze të bazës r .



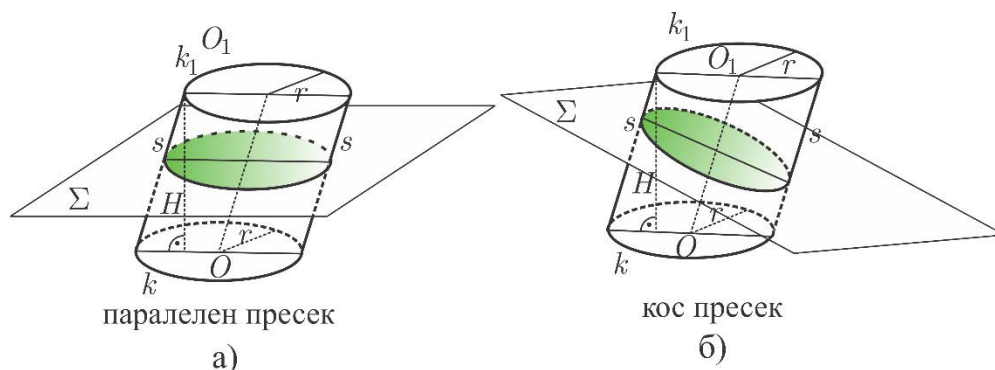
Vizatimi 33

Cilindri i drejtë me lartësi H dhe rreze r fitohet edhe me rrotullimin e drejtkëndëshit me brinjë r dhe H rreth brinjës me gjatësi H (vizatimi 34).



Vizatimi 34

Nëse rrafshi Σ , i ndryshëm prej rrafshit të bazave, dhe paralel me rrafshet e bazave, e pret cilindrin, atëherë fitohet prerje paralele e cilindrit me rrafshin (vizatimi 35 a). Prerja është rreth me rreze të barabartë me rrezën e cilindrit.

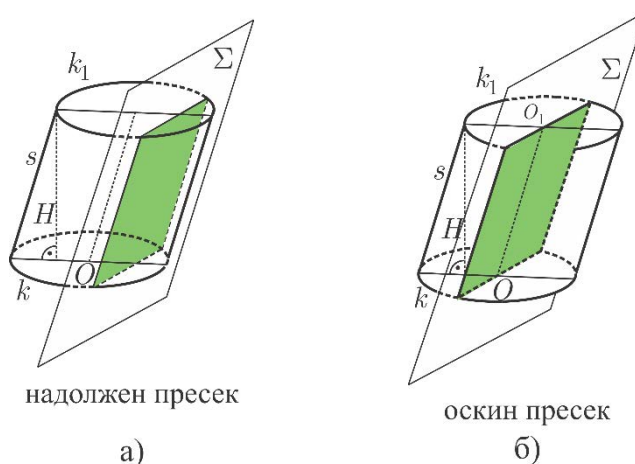


Цртеж 35

Nëse rrafshi i pret të gjitha gjeneratrisat e cilindrit dhe nuk është paralel me bazat, prerja quhet **e pjerrët** (vizatimi 35 b).

Prerja e rrafshit me cilindrin quhet përsëgjati (vizatimi 36 a). Nëse rrafshi i prerjes është paralel me boshtin e cilindrit. Poashtu prerja është paralelogram, kurse te cilindri i drejtë kjo prerje është drejtkëndësh.

Nëse rrafshi e përmban boshtin e cilindrit, atëherë prerja quhet **boshtore** (vizatimi 36 b). Kjo prerje është paralelogram me brinjë gjeneratrisa dhe diametri i cilindrit. Te cilindri i drejtë prerja boshtore është drejtkëndësh, kurse te cilindri barabrinjës është katror



Цртеж 36

Detyra 1. Prerja boshtore e cilindrit është katror me syprinë 25 cm^2 . Cakto rrezën dhe lartësinë e cilindrit.

Zgjidhja. Prej kësaj që prerja është katror kemi se $H = d$, ku d është diametri i bazës së cilindrit. Domethënë, prej $d^2 = 25$ fitohet se $d = 5 \text{ cm}$ d.m.th.,

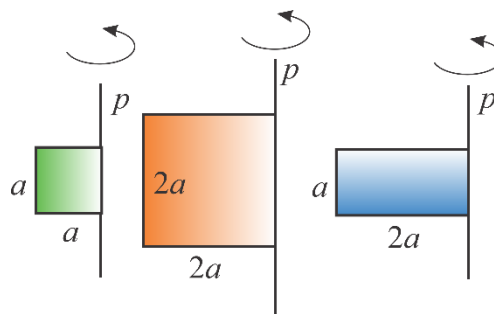
$$H = 5 \text{ cm} \text{ и } r = \frac{d}{2} = 2,5 \text{ cm} . \blacklozenge$$

Detyra

1. Me rrotullimin e çdo figure te vizatimi 37 fitohet cilindër, Me shfrytëzimin e figurës 37 përgjigju në këto pyetje:

- sa është lartësia e çdo cilindri?
- sa është rrezja e vijës rrethore?

2. Prerja paralele e një cilindri e ka syprinën 25 cm^2 . Sa është i lartë cilindri nëse lartësia është tri herë më e madhe se diametri i bazës?



Vizatimi 37

3. Lartësia e një cilindri është 6 cm , kurse rrezja e bazës 5 cm . Cakto syprinën e prerjes përsëgjati e cila është në largësi prej 4 cm prej boshtit të cilindrit.

4. Njehson syprinën e prerjes boshtore të cilindrit barabrinjës me rreze të bazës 7 cm .

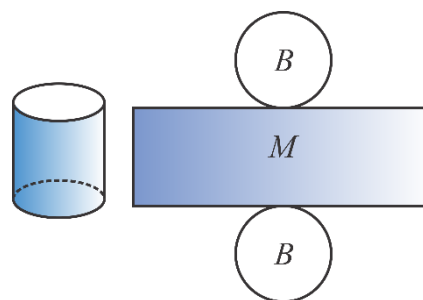
5. Është dhënë cilindri me lartësi 10 cm dhe rreze $\frac{r}{2}$. Prerja përsëgjati, e cila është në largësi prej boshtit, e ka syprinën 200 cm^2 . Gjej rrezën e cilindrit.

8.8. Syprina dhe vëllimi i cilindrit

Sipërfaqja e çdo cilindri përbëhet prej dy rrrathëve dhe një sipërfaqe anësore.

Nëse një cilindër të drejtë “e hapim” sipas njërës gjeneratrisë të tij dhe sipas vijave rrethore të dy bazave të rrafshit si te vizatimi 38 fitohet **rrjeti i cilindrit**.

Domethënë rrjeti i cilindrit përbëhet prej një drejtkëndëshi dhe dy rrrathëve të puthitshëm.



Vizatimi 38

Nëse syprinën e bazës e shënojmë me B , kurse syprinën e mbështjellësit me M , atëherë syprina e cilindrit (vizatimi 38) është:

$$P = 2B + M$$

Pasi B është syprina e rrethit me rreze R , atëherë $B = R^2 \pi$ kurse syprina e mbështjellësit është syprina e drejtkëndëshit me një brinjë gjatësia e vijës rrethore $2R\pi$ kurse tjetra lartësia e cilindrit H , d.m.th., $M = 2R\pi H$. Prandaj: $P = 2R^2 \pi + 2R\pi H$ ose

$$P = 2R\pi (R + H) .$$

Kjo formulë shfrytëzohet vetëm për njehsimin e syprinës së cilindrit të drejtë. Më tej me konceptin cilindër do të nënkuptojmë cilindër të drejtë.

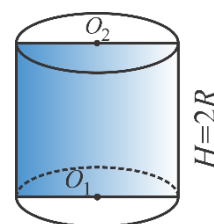
Detyra 1. Njehso syprinën e cilindrit me lartësi 8cm dhe me perimetrin e bazës 20π cm.

Zgjidhja. Për ta njehsuar syprinën e cilindrit është e nevojshme ta caktojmë rrezen prej perimetrit të dhënë, d.m.th., $L = 2R\pi = 20\pi$ prej ku $R = 10$ cm.

Domethënë $P = 20\pi(10+8) = 360\pi \text{ cm}^2$. ♦

Detyra 2. Magazinë për drithë e ka formën e cilindrit barabrinjës me rreze të bazës 75 m. Njehso syprinën e magazinës.

Zgjidhje. Prej asaj që $H = 2R$ (vizatimi 39) për syprinën fitohet $P = 6R^2\pi$ pra $P = 33750\pi \text{ m}^2$. ♦



Vizatimi 39

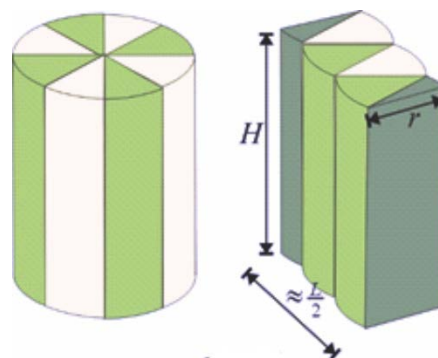
Cilindri te vizatimi 40 është ndarë në pjesë të barabarta, prej të cilave është formuar trup në formë të kuadrit. Sa pjesë, në të cilin është ndarë cilindri janë të vegjël, trupi i formuar prej atyre pjesëve është më afër deri te kuadri. Vëllimi i kuadrit është $V = B \cdot H$, ku B është syprina e bazës, kurse H është lartësia e cilindrit. Baza e kuadrit është drejkëndësh me brinjë rrezja e bazës dhe përafërsisht gjysma prej perimetrit të vijës rrethore

$$\frac{2R\pi}{2} = R\pi$$

Domethënë $B = R\pi R = R^2\pi$. Vëllimi i kuadrit është $B = R^2\pi H$

Mund të përfundojmë se vëllimi i cilindrit është

gjithashtu $B \cdot H$, përkatësisht, $B = R^2\pi H$.



Vizatimi 40

Vëllimi V i cilindrit është i barabartë me prodhimin e syprinës së bazës dhe lartësisë së tij H d.m.th., $V = R^2\pi \cdot H$

Detyra 3. Një enë në formë të cilindrit është 90% e mbushur me vaj. Rrezja e bazës dhe lartësia enës janë të barabarta me 12 cm. Sa është vëllimi i vajit në enë?

Zgjidhje. Vëllimi i enës është $V = R^2\pi \cdot R = 12^3\pi = 1728\pi \text{ cm}^3$, pra vëllimi i vajit është $1728\pi \cdot 0,9 = \frac{7776}{5}\pi \text{ cm}^3$. ♦

Detyra 4. Një gyp në formë të cilindrit, e ka gjatësinë 7,5 m dhe diametrin e bazës prej 60 cm. Njehso vëllimin e gypit. 60cm

Zgjidhje. Prej $d = 2R$ kemi se $R = 30\text{cm}$, pra $V = 30^2\pi \cdot 750 = 675000\pi \text{ cm}^3$. ♦

Detyra

1. Njehso syprinën e cilindrit barabrinjës, nëse syprina anësore e tij është 20 cm^2 .
2. Syprina anësore e cilindrit rrethor të drejtë është $192\pi \text{ cm}^2$, kurse diametri i bazës është 20cm. Të njehsohet vëllimi i cilindrit.
3. Të njehsohet syprina e cilindrit rrethor të drejtë me vëllim $112\pi \text{ cm}^3$ dhe lartësia 7cm.
4. Një enë e qelqit (me kapak) e ka formën e cilindrit dhe vëllimin prej $375\pi \text{ cm}^3$. Lartësia e tij është tri herë më e madhe se rrezja e bazës. Të njehsohet syprina e enës.

5. Syprina e një cilindri është 80cm^2 . Ndryshimi i lartësisë me rrezën e atij cilindri është 2 cm. Njehso vëllimin e cilindrit. $280\text{cm}\pi 2\text{cm}$

8.9. Koni. Prerjet e konit me rrafsh

Le të jetë $k(O,r)$ rreth i cili shtrihet në rrafshin Σ , kurse S është pika jashtë atij rrafshi.

Kon quhet bashkësia e të gjitha segmenteve XS , ku X është pika prej rrethit $k(O,r)$.

Segmenti OS quhet **boshti i konit**.

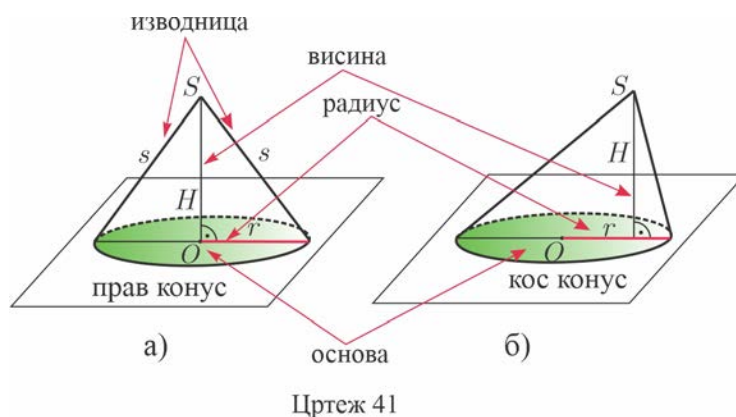
Nëse $OS \perp \Sigma$, atëherë koni quhet **i drejtë**. Në të kundërtën ai quhet **koni** (vizatimi 41).

Segmentet XS , ku X shtrihet te vija rrethore k quhen **direktrisa (gjeneratrja) të konit**. Ato e formojnë **sipërfaqen anësore** ose **mbështjellësi i konit**.

Te koni i drejtë të gjitha direktriset janë të barabarta. Rrethi $k(O,r)$ quhet **baza e konit**, kurse r quhet **rrezja e konit**.

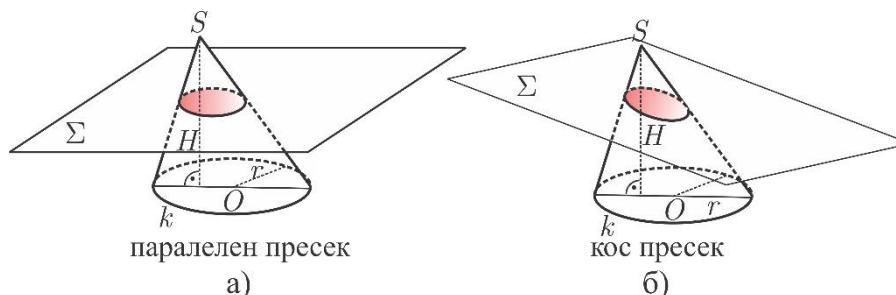
Largësia prej S deri te rrafshi Σ quhet lartësia e konit.

Koni i drejtë quhet **barabrinjës** nëse direktrisa është e barabartë me diametrin e bazës, d.m.th., $s = 2r$.



Prerja e konit me rrafshin Σ , e ndryshme prej rrafshit të bazës, quhen:

- **paralele**, nëse Σ është rrafsh paralel me rrafshin e bazës, nuk kalon nëpër S , i pret të gjitha direktriset. Prerja e fituar është rreth (vizatimi 42 a).
- **i pjerrët**, nëse Σ nuk është paralel me rrafshin e bazës, nuk kalon nëpër S dhe i pret të gjitha direktriset (vizatimi 42 b).



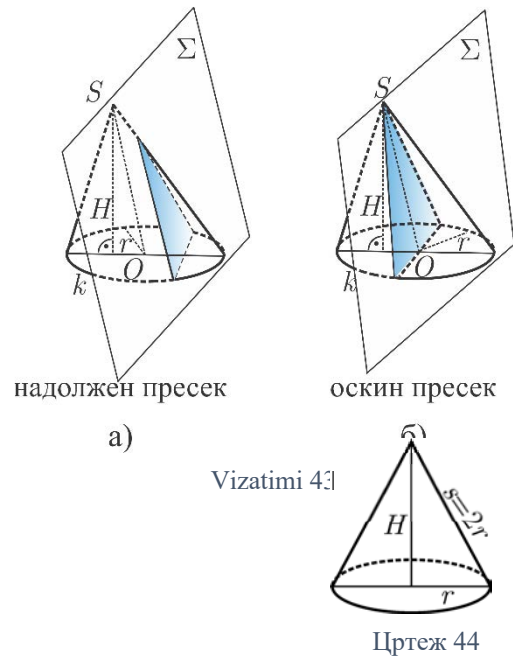
• **përsëgjati**, nëse rrafshi që e pret konin është paralel me boshtin e konit. Prerja e fituar është trekëndësh, kurse te koni i drejtë është trekëndësh barakrahas (vizatimi 43 a).

• **boshtor**, nëse rrafshi që e pret konin e përmban boshtin e konit. Prerja te koni i drejtë është trekëndësh barakrahas (vizatimi 43 b).

Detyra 1. Njehso syprinën e prerjes boshtore të konit barabrinjës me rreze të bazës r .

Zgjidhja. Pasi $s = 2r$ dhe $d = 2r$, vijon se prerja boshtore është trekëndësh barabrinjës me brinjë $2r$. Syprina e atij trekëndëshi është

$$P_1 = \frac{(2r)^2 \sqrt{3}}{4} = r^2 \sqrt{3} \quad (\text{vizatimi 44}) . \blacklozenge$$



Më tej do të punojmë vetëm me kon të drejtë, d.m.th., me kon do të nënkuptojmë vetëm kon të drejtë.

Gjatë prerjes paralele të konit me rrafsh vlen kjo teoremë:

Teorema 1. Nëse një kon e presim me rrafsh paralel me bazën, atëherë:
 -direktrisa (gjeneratrisa) dhe lartësia janë ndarë në raport të njëjtë,
 -syprinat e bazës dhe prerja qëndrojnë si katrorët e largësive të tyre deri te maja.

Me të vërtetë, rrafshi Σ_1 , le ta pret lartësinë OS në pikën

O_1 , kurse direktrisa SM në M_1 (vizatimi 45).

Pasi $\Sigma_1 \parallel \Sigma$ vijon se $O_1M_1 \parallel O_2M_2$ d.m.th.,

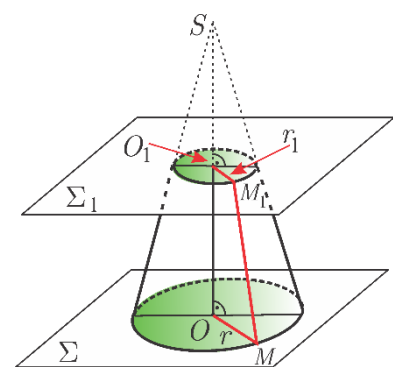
$$\Delta SOM \sim \Delta SO_1M_1.$$

Prej ngjashmërisë së këtyre trekëndëshave kemi:

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{SM_1}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}} \quad \text{Nëse } B \text{ është syprina e bazës, kurse } B_1 \text{ syprina e}$$

prerjes, r dhe r_1 janë rrezet e bazës dhe prerjes, përkatësisht

$$\text{atëherë } \frac{B_1}{B} = \frac{r_1^2 \pi}{r^2 \pi} \text{ d.m.th., } \frac{B_1}{B} = \frac{r_1^2}{r^2} .$$



Vizatimi 45

Prej $\Delta SOM \sim \Delta SO_1M_1$ vijon:

$$\frac{\overline{O_1M_1}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{SO_1}}{\overline{SO}} \Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{\overline{SO_1}}{\overline{SO}} \Rightarrow \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{\overline{SO_1}^2}{\overline{SO}^2} \Rightarrow \frac{B_1}{B} = \frac{\overline{SO_1}^2}{\overline{SO}^2} . \blacklozenge$$

Detyra 2. Është dhënë koni me rreze r . Cakto syprinën e prerjes paralele që është në lartësi gjysma prej lartësisë së konit.

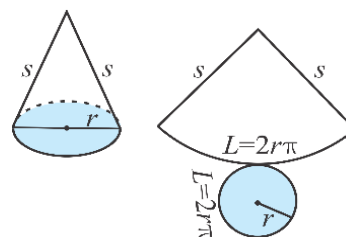
Zgjidhja. Nëse r është rrezja e konit, r_1 rrezja e prerjes paralele dhe H lartësia e konit, atëherë $H_1 = \frac{H}{2}$ është lartësia e prerjes paralele, pra prej teoremës 1 vijon se $\frac{B}{B_1} = \frac{H^2}{H_1^2}$ prej ku fitohet $\frac{B}{B_1} = 4$ d.m.th., $B_1 = \frac{B}{4} = \frac{r^2\pi}{4}$. ♦

Detyra.

1. Njehso syprinën e prerjes boshtore të koni me rreze 6 cm dhe gjeneratrisë 10 cm.
2. Perimetri i prerjes boshtore të konit barabrinjës është 12 cm. Cakto rrezën dhe lartësinë e konit.
3. Cakto syprinën e prerjes boshtore të konit me rreze 10 cm, nëse këndi ndërmjet direktisës dhe rrafshit me bazën është 45° .
4. Lartësia e konit është 15 cm, kurse perimetri i prerjes boshtore është 90 cm. Cakto rrezën e konit.
5. Është dhënë koni me rreze $r = 3$ cm. Cakto syprinën e prerjes paralele që është në largësi një e treta prej lartësisë së konit, të matur prej majës.

8.10. Syprina dhe vëllimi i konit

Nëse një kon e presim sipas njëres gjeneratrisë dhe sipas vijës rrethore të bazës dhe e hapim si te vizatimi 46 fitohet rrjeta e konit. Prej figurës 46 mund të vërejmë se rrjeti i konit me rreze r dhe gjeneratrisë s përbëhet prej 2 pjesëve: rrethit me rreze r , i cili është baza e konit dhe mbështjellësi i konit ose sipërfaqja anësore. Mbështjellësi i konit është pjesë e rrethit r , i cili quhet prerje rrethore s .



Vizatimi 46

Syprina e bazës së konit është rreth (vizatimi 46), pra kemi $B = r^2\pi$. Mbështjellësi i konit është prerje rrethore, syprina e të cilit është

$$M = 2r\pi \cdot \frac{s}{2} = r\pi s.$$

Syprina e konit është shuma prej syprinave të bazës dhe mbështjellësit $S = B + M$ d.m.th.,

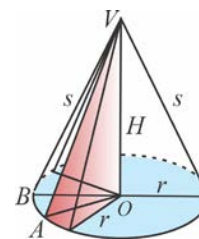
$$P = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r + s).$$

- Detyra 1. a)** Njehso syprinën e konit me rreze $r = 5$ cm dhe gjeneratrisë $s = 10$ cm,
b) syprina e konit është 24 cm^2 . Rrezja e konit është $r = 12$ cm. Cakto gjeneratrisën e konit,
c) Njehso syprinën e konit me rreze $r = 5$ cm dhe lartësi $H = 12$ cm.
Решение. a) $P = 5\pi(5 + 10) = 75\pi \text{ cm}^2$ **b)** $24\pi = 3\pi(3 + s) \Rightarrow s = 5$ cm
c) Prej teoremës së Pitagorës vijon se

$$s = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}, \text{ pra } P = 5\pi(5 + 13) = 90\pi \text{ cm}^2$$

E dimë se koni me rreze r dhe H lartësi fitohet kur çfarëdo trekëndësh me katetë r dhe H rrotullohet rreth katetës H . Nëse e shqyrtojmë trupin që fitohet prej dy pozitave të afërta të trekëndëshit gjatë rrotullimit të tij, do të vërejmë se i përngjanë piramidës trefaqësore me lartësi H .

Baza e piramidës aq më pak do të dallohet prej trekëndëshit, nëse largësia ndërmjet A dhe B (vizatimi 47) është më e vogël. Vëllimi i një pjese të atillë përafërsisht është e barabartë me vëllimin e piramidës trefaqësore $ABOV$. Syprinat e atyre bazave të tri pjesëve janë $B_1, B_2, \dots, B_n$.



Vizatimi 47

Domethënë vëllimi i konit do të jetë shuma prej vëllimeve të gjithë atyre pjesëve, d.m.th.,

$$V = \frac{1}{3}B_1H + \frac{1}{3}B_2H + \frac{1}{3}B_3H + \dots + \frac{1}{3}B_nH$$

$$V = \frac{1}{3}H(B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n)$$

$$V = \frac{1}{3}BH.$$

Nëse te formula për vëllimin zëvendësojmë $B = r^2\pi$ do të fitojmë $V = \frac{r^2\pi H}{3}$.

Shembulli 1. a) Vëllimi i konit me rreze $r = 9\text{cm}$ dhe lartësi $H = 20\text{cm}$ është

$$V = \frac{9^2\pi \cdot 20}{3} = 540\pi \text{ cm}^3.$$

b) Koni me lartësi 5 cm dhe vëllimi $125\pi \text{ cm}^3$ e ka rrezen $r^2 = \frac{3 \cdot 125\pi}{5\pi} = 75$. Domethënë,

$$r = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ cm}. \quad \blacklozenge$$

Detyra

1. Njehso syprinën e konit, nëse:

- a) $r = 6\text{cm}$, $H = 8\text{cm}$, b) $s = 29\text{cm}$, $H = 21\text{cm}$,
c) $d = 1,4\text{cm}$, $H = 2,4\text{cm}$.

2. Njehso gjeneratrisën e konit, nëse $M = 255,3\pi \text{ cm}^2$ dhe $d = 7.4\text{ cm}$

3. Njehso vëllimin e konit barabrinjës nëse rrezja është 9 cm .

4. Njehso vëllimin e konit, nëse direktrisa është 17cm , kurse perimetri i bazës është $16\pi \text{ cm}$.

5. Vëllimi i një koni është 8640 cm^3 . Lartësia dhe gjeneratrisa qëndrojnë si $15:17$. Njehso syprinën e konit.

8.11. Syprina dhe vëllimi i konit të cinguar

Syprina e konit të cinguar është e barabartë me shumën e syprinave të dy bazave dhe syprinës anësore (mbështjellësit)

$P = B + B_1 + M$ dhe B_1 janë syprinat e bazave, kurse M syprina

anësore. Nëse me R dhe r i shënojmë rrezet e bazave, syprinat e tyre do të jenë $B = R^2\pi$ dhe $B_1 = r^2\pi$ (vizatimi 48).

Për syprinën anësore të konit të drejtë të cinguar vlen kjo teoremë:

Teorema. Syprina anësore M e konit të cinguar me rreze të bazave R dhe r dhe gjeneratrisë s është $M = \pi s(R + r)$

Me të vërtetë, koni i cinguar le të jetë fituar prej konit të drejtë me majë S dhe bazë rreth $k(O, r)$ dhe prerja paralele rreth $k_1(O_1, r_1)$. Me s_1 e shënojmë gjeneratrisën e konit të cinguar me majë S dhe bazë $k_1(O_1, r_1)$ (vizatimi 49). Atëherë gjeneratriza e gjithë konit është $s + s_1$.

Syprinën anësore M të konit të cinguar e fitojmë si ndryshim prej syprinave anësore të dy koneve, përkatësisht:

$$M = R\pi(s + s_1) - r\pi s_1 = R\pi s + \pi s_1(R - r).$$

Gjeneratrisën s_1 do ta shprehim varësisht prej R , r dhe s për të cilën do ta shqyrtojmë prerjen boshtore të konit ABC .

Prej $\triangle AOS \sim \triangle A_1O_1S$ vijon:

$$\frac{R}{r} = \frac{s + s_1}{s_1} \Rightarrow s_1 R = rs + rs_1 \Rightarrow s_1(R - r) = rs \Rightarrow s_1 = \frac{rs}{R - r}$$

Me zëvendësimin te M fitohet:

$$M = R\pi s + rs(R - r) \quad \square \quad M = R\pi s + \pi(R - r) \frac{rs}{R - r} \quad \square \quad M = \pi s(R + r)$$

Domethënë, syprina P e konit të cinguar do të jetë:

$$P = R^2\pi + r^2\pi + \pi s(R + r) \text{ t.e. } P = \pi(R^2 + r^2 + s(R + r)). \quad \blacklozenge$$

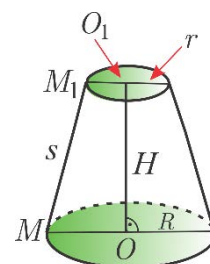
Vëllimi i konit të cinguar njehsohet me ndihën e formulës

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

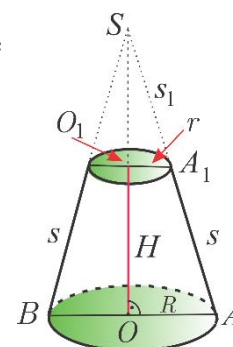
Me të vërtetë, koni i cinguar është fituar prej konit me majë C baza e të cilit është rreth $k(O, R)$ dhe prerja paralele është rreth $k_1(O_1, r)$ dhe prerja paralele është rreth $k_2(O_2, r)$, H është lartësia e konit të cinguar, H_1 lartësia e konit të prerë me majë C dhe bazë $k_1(O_1, r)$ (vizatimi 50). Atëherë lartësia e gjithë konit është $H + H_1$, kurse vëllimi i konit të cinguar është i barabartë me ndryshimin e vëllimit të gjithë konit dhe konit të prerë përkatësisht:

$$V = \frac{R^2\pi(H + H_1)}{3} - \frac{r^2\pi H_1}{3} = \frac{\pi}{3}(R^2 H + (R^2 - r^2)H_1).$$

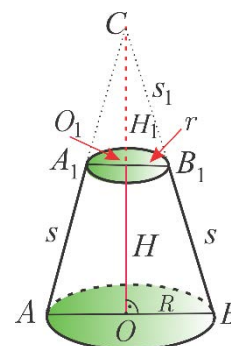
Lartësia H_1 e konit të cinguar mund të shprehet me R , r dhe H , nëse e shqyrtojmë prerjen boshtore CAB të konit.



Vizatimi 48



Vizatimi 49



Vizatimi 50

Од сличноста на триаголниците AOC и A_1O_1C следува:

$$\frac{R}{r} = \frac{H + H_1}{H_1} \Rightarrow H_1 R = rH + rH_1 \Rightarrow H_1(R - r) = rH \Rightarrow H_1 = \frac{rH}{R - r}$$

Со замена во: $V = \frac{\pi}{3}(R^2 H + (R^2 - r^2)H_1)$ се добива:

$$V = \frac{\pi}{3} \left(R^2 H + (R^2 - r^2) \frac{rH}{R - r} \right) = \frac{\pi}{3} \left(R^2 H + \frac{(R - r)(R + r)rH}{R - r} \right) = \frac{\pi}{3} (R^2 H + (R + r)rH) \text{ т.е.}$$

$$V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2). \blacklozenge$$

Задача 1. Висината на прав пресечен конус е $H = 24\text{cm}$, а генератрисата s и радиусите R и r на основите се однесуваат како $5:4:1$. Пресметај ја плоштината на обвивката на конусот.

Решение. Од условот $s:R:r = 5:4:1$ следува дека $s = 5k$, $R = 4k$ и $r = k$, за некој позитивен реален број k . Да го означиме оскиниот пресек со $ABCD$ (цртеж 51). Ако од D спуштиме нормала на AB и подножјето го означиме со M , тогаш $\overline{DM} = H$, $\overline{AM} = R - r$ и од правоаголниот триаголник AMD се добива:

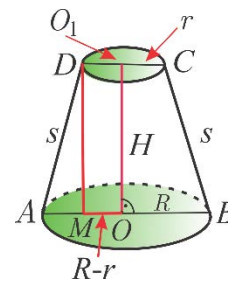
$$H^2 = s^2 - (R - r)^2 \text{ т.е. } 24^2 = 25k^2 - 9k^2, \text{ од каде } k = 6. \text{ Значи}$$

$$s = 30\text{cm}, R = 24\text{cm} \text{ и } r = 6\text{cm}, \text{ па } M = 30\pi(24 + 6) = 900\pi \text{ cm}^2. \blacklozenge$$

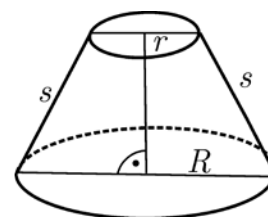
Задача 2. Одреди го волуменот на потсечен конус со радиуси на основите $R = 13\text{cm}$, $r = 8\text{cm}$ и генератриса $s = 13\text{cm}$.

Решение. Од $s^2 = H^2 + (R - r)^2$ со замена на вредностите се добива $H = 12\text{cm}$. Според тоа

$$V = \frac{12\pi}{3} (13^3 + 13 \cdot 8 + 8^2) = 1348\pi \text{ cm}^3. \blacklozenge$$



Vizatimi 51



Vizatimi 52

Detyra

1. Cakto syprinën anësore të konit të cunguar, me lartësi 12 cm dhe rreze të bazave 10 cm dhe 5 cm.

2. Cakto syprinën anësore të konit të cunguar nëse gjeneratrisa e tij formon kënd prej 30° me bazën, kurse syprina e konit të cunguar është 200cm².

3. Sa litra ujë nxë kova në formë të konit të cunguar me diametra të bazave 12cm dhe 20cm dhe lartësia 24cm, nëse dihet se $1\text{ l} = 1 \text{ dm}^3$?

4. Трапеzi barakrahas me baza 7 cm dhe 17 cm dhe syprinë prej 144 cm² rrotullohet rreth boshtit të tij. Cakto vëllimin e trupit të fituar.

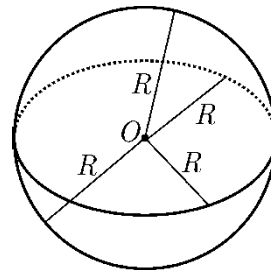
5. Njehso rrezet e bazave të konit të cunguar me lartësi 24 dm, gjeneratrisë 25 dm dhe syprina anësore 425π .

8.12. Sfera dhe topi. Syprina dhe vëllimi

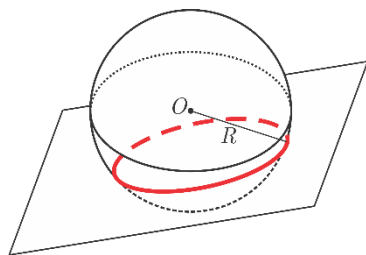
Përkufizimi. Bashkësia e pikave në hapësirë të cilat janë në largësi të njëjtë prej pikës së dhënë quhet **sferë**.

Pika e dhënë quhet **qendra e sferës**, largësia quhet **rrezja e sferës**.

Zakonisht sferën me qendër O dhe rreze R do ta shënojmë me $S(O, R)$ (vizatimi 53).



Vizatimi 53



Цртеж 54

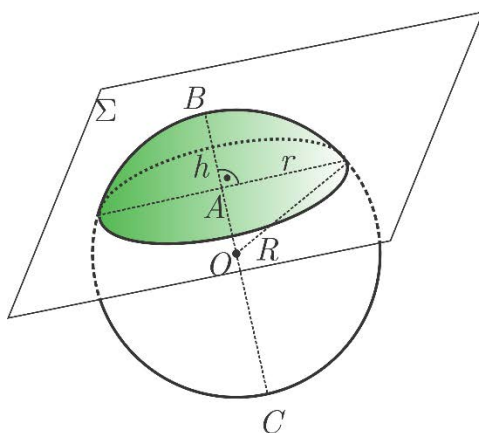
Nëse rrafshi dhe sfera priten në më shumë se një pike, atëherë prerja e tyre është **vijë rrethore** (vizatimi 54).

Shembulli 1. Prerjet të cilat janë një lloj të larguara prej qendrës së sferës kanë rreze të barabarta, pasi largësia prej qendrës deri te çdo prerje është e barabartë, vijon se edhe diametrat e prerjeve janë të barabarta.

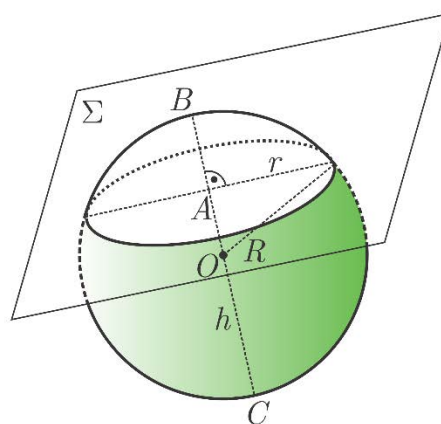
Rrafshi Σ le ta pret sferën $S(O, R)$. Në më shumë se një pikë dhe Σ nuk kalon nëpër O . Pjesët prej sferës që i prejnë rrafshi quhen **kalota**. Kalotës i takon edhe vija rrethore $\Sigma \cap S(O, R)$ (vizatimi 55).

Nëse rrafshi kalon nëpër qendrën O pjesët e fituara quhen **gjysmësfera**.

Le të jetë p normalja e Σ që kalon nëpër O dhe le të jetë $\{A\} = p \cap \Sigma$ dhe $\{B, C\} = p \cap S(O, R)$. Largësia $h = \overline{AB}$ (d.m.th., $h = \overline{AC}$) quhet **lartësia e kalotës**. Rrezja r e vijës rrethore $\Sigma \cap S(O, R)$ quhet rreza e kalotës.



„помала“ калота
со висина $h = \overline{AB}$



„поголема“ калота
со висина $h = \overline{AC}$

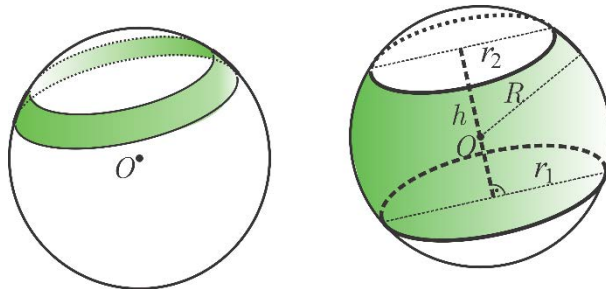
Vizatimi 55

Pjesa prej sferës që e prejnë dy rrafshet paralele quhet **brez** (ose **zonë**) (vizatimi 56).

Te ai bëjnë pjesë edhe vija rrethore të cilat janë prerje e rrafshëve dhe sferës.

Largësia ndërmjet rrafshëve quhet **lartësia e brezit**.

Rrezet e prerjeve të sferës me rrafshet quhen **rreze të brezit**.



Vizatimi 56

Syprina e sferës me rreze R është e barabartë me $P = 4R^2\pi$.

Shembulli 1. Syprina e sferës me rreze $R = 7dm$ është e barabartë me

$$P = 4 \cdot 7^2 \pi = 196\pi \text{ dm}^2. \blacklozenge$$

Shembulli 2. Syprina e kalotës e prerë prej sferës me rreze R dhe lartësi të kalotës është e barabartë me h

$$P = 2\pi Rh. \blacklozenge$$

Shembulli 3. Syprina e kalotës me lartësi $h = 4cm$ e prerë prej sferës me rreze $R = 7cm$ është e barabartë me $P = 2\pi \cdot 4 \cdot 7 = 56\pi \text{ cm}^2. \blacklozenge$

Syprina e brezit me lartësi h e prerë prej sferës me rreze R është e barabartë me

$$P = 2\pi Rh.$$

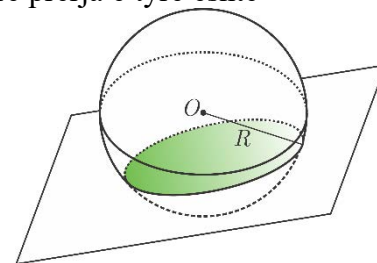
Пример 4. Shembulli 4. Syprina e brezit me lartësi $h = 4cm$ e prerë prej sferës me rreze $7cm$ është e barabartë me $P = 2\pi \cdot 4 \cdot 7 = 56\pi \text{ cm}^2. \blacklozenge$

Përkufizimi. Bashkësia e të gjitha pikave në hapësirë largësia e të cilës deri te pika e dhënë O nuk është më e madhe se numri real pozitiv i dhënë R quhet **top** me qendër në O dhe rreze R .

Zakonisht topin me qendër në O dhe rreze R do ta shënojmë me $T(O, R)$.

Nëse rrafshi dhe topi priten në më shumë se një pikë, atëherë prerja e tyre është rreth (vizatimi 57). Prerjet të cilat janë të barabartë të larguar prej qendrës së topit kanë rreze të barabarta.

Rrafshi Σ le ta pret topin $T(O, R)$. Në më shumë se një pikë dhe Σ nuk kalon nëpër O . Pjesët prej topit që i pret rrafshi quhen **prerjet e topit** (vizatimi 58).



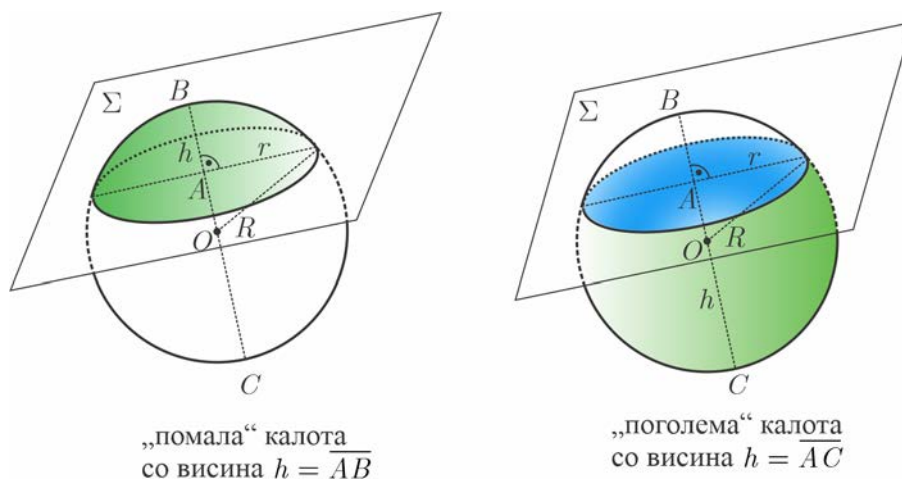
Vizatimi 57

Prerjes së topit i takon rrethi $\Sigma \cap T(O, R)$ dhe ai është i kufizuar me kalotën përkatëse. Nëse rrafshi kalon nëpër qendrën O pjesët e fituara quhen **gjysmëtopa**.

Le të jetë p normalja e Σ që kalon nëpër O dhe le të jetë $\{A\} = p \cap \Sigma$ dhe $\{B, C\} = p \cap T$ (O, R). Largësia $h = \overline{AB}$ (d.m.th., $h = \overline{AC}$) quhet lartësia e prerjes së topit. Rrezja r të vija rrethore $\Sigma \cap S$ (O, R) quhet rreze e prerjes së topit.

Lartësia dhe rrezja e prerjes së topit janë të a)barabarta me lartësinë dhe rrezen e kalotës përkatëse.

Syprina e prerjes së topit është e barabartë me shumën e syprinave të kalotës dhe syprinën e rrethit me të cilin është kufizuar prerja, d.m.th., $P = 2R\pi h + r^2\pi$



Цртеж 58

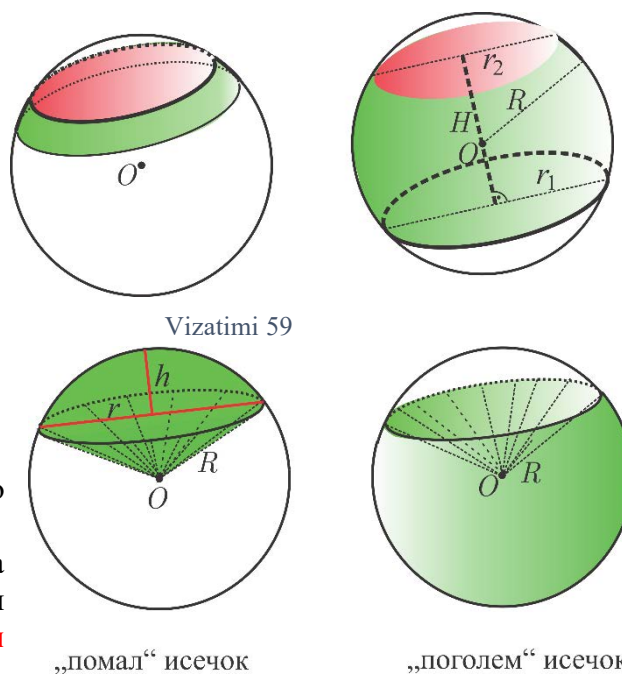
Pjesën e topit që e prejnë dy rrafshe paralele quhen **shtresa e topit**. Te ai bëjnë pjesë edhe rrathët të cilët janë prerje të rrafsheve dhe topit dhe është kufizuar me brezin përkatës. Largësia ndërmjet rrafsheve quhet lartësia e shtresës së topit dhe e shënojmë me H .

Rrezet e prerjeve të topit me rrafshet quhen **rreze të shtresës së topit**. Lartësia dhe rrezet e shtresës së topit janë të barabarta me lartësinë dhe rrezet të brezit përkatës (vizatimi 59).

Syprina e prerjes së topit është e barabartë me shumën e syprinave të syprinës anësore të konit dhe syprinës dhe syprinës së kalotës

$$P = r_1^2\pi + r_2^2\pi + 2R\pi H$$

Делот од топката ограничен со калота со висина h и бочната површина на конусот со центар во центарот на топката и основа граничниот круг на соодветниот топкин отсечок со радиус r се нарекува **топкин исечок** (цртеж 60)



Vizatimi 59

Vizatimi 60

Плоштината на топкиниот исечок е еднаква на збирот од плоштината на бочната површина на конусот и плоштината на калотата $P = 2R\pi h + \pi Rr$

Волуменот на топка со радиус R е еднаков на $V = \frac{4}{3}R^3\pi$.

Пример 5. Волуменот на топка со радиус $R = 8\text{ dm}$ изнесува $V = \frac{4}{3}8^3\pi = \frac{2048\pi}{3}\text{ dm}^3$. ♦

Задача 1. Одреди го дијаметарот на топката чиј волумен е $36\pi\text{ cm}^3$.

Решение. Од равенството $36\pi = \frac{4}{3}R^3\pi$ добиваме $R^3 = 27$, т.е. $R = 3$, па дијаметарот е $2R = 6\text{ cm}$. ♦

Задача 2. Една мензура со дијаметар 2 cm е исполнета со течност од висина од 10 cm . За колку ќе се зголеми висината на течноста ако во мензурата се стави метално топче со дијаметар 1 cm .

Решение. Волуменот на течноста во мензурата е $10\pi\text{ cm}^3$, а волуменот на топчето е $\frac{1}{6}\pi\text{ cm}^3$. Според тоа, висината на течноста заедно со топчето е $\left(10 + \frac{1}{6}\right)\text{ cm}$, т.е. зголемувањето на висината е $\frac{1}{6}\text{ cm}$. ♦

Волуменот на топкин отсечок со висина h исечен од топка со радиус R е еднаков на

$$V = \frac{h^2\pi}{3}(3R - h).$$

Пример 6. Волуменот на топкиниот отсечок со висина $h = 3\text{ dm}$ исечен од топка со

радиус $R = 8\text{ dm}$ изнесува $V = \frac{3^2\pi}{3}(3 \cdot 8 - 3) = 63\pi\text{ dm}^3$. ♦

Волуменот на топкин исечок со висина на калотата h исечен од топка со радиус R е еднаков на $V = \frac{2}{3}R^2h\pi$.

Пример 7. Волуменот на топкиниот исечок со висина на калотата $h = 3\text{ dm}$ исечен од топка со радиус $R = 8\text{ dm}$ изнесува $V = \frac{2}{3}8^2 \cdot 3\pi = 128\pi\text{ dm}^3$. ♦

Волуменот на топкин слој со висина h , радиуси на граничните кругови r_1 и r_2 , отсечен од топка со радиус R , е еднаков на $V = \frac{h\pi}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$.

Пример 8. Волуменот на топкиниот слој со висина $h = 3\text{ dm}$ отсечен од топка со радиус $R = 8\text{ dm}$ кој има радиуси на граничните кругови $r_1 = 2\text{ dm}$ и $r_2 = 3\text{ dm}$ изнесува $V = \frac{4\pi}{6}(3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 3^2) = 32\pi\text{ dm}^3$. ♦

Detyra

1. Cakto rrezen e topit nëse syprina e rrethit të madh është $324\pi \text{ cm}^2$.
2. Topi me rreze 65 cm është prerë me dy rrafshe të cilat gjenden nga ana e njëjtë e qendrës së topit dhe janë në largësi prej 16 cm dhe 25 cm prej qendrës. Cakto syprinën dhe vëllimin e shtresës.
3. Cakto syprinën e sferës dhe vëllimin e topit i cili është prerë me dy rrafshe paralele të cilat janë në anë të ndryshme prej qendrës dhe janë në largësi prej 10 cm. Syprina e prerjeve është $25\pi \text{ cm}^2$ dhe $16\pi \text{ cm}^2$.
4. Dy topa të metalit me rreze 4 cm dhe 7 cm janë shkrirë në top të ri. Sa është rrezja e tij?
5. Rrezet e rrethit i cili fitohet kur rrafshi do të pritet topi është dy herë më i vogël e topit. Cakto vëllimin e topit nëse prerja e ka syprinën $\frac{9}{4}\sqrt{\pi} \text{ cm}^2$

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Baza e prizmit të drejtë është trekëndësh barakrahas me bazën 8 cm dhe krahun 5 cm. Cakto syprinën anësore, nëse lartësia e prizmit është e barabartë me lartësinë e trekëndëshit që është bazë, e tërhequr prej majës së trekëndëshit barakrahas.
2. Baza e piramidës trefaqësore është trekëndësh kënddrejtë me katetën e vogël 3 cm dhe këndin e ngushtë prej 30° . Cakto vëllimin e piramidës nëse lartësia e saj është e barabartë me hipotenuzën e bazës.
3. Syprina e një cilindri është $1596\pi \text{ cm}^2$. Cakto lartësinë e cilindrit nëse diametri i tij është 12 cm.
4. Cakto syprinën e konit me syprinë të bazës 144 cm^2 dhe gjeneratrën $\frac{23}{\sqrt{\pi}}$.
5. Cakto diametrin e topit, nëse syprina e tij është $289\pi \text{ cm}^2$.
6. Te paralelopipedi brinjët e bazës janë 2 cm dhe 8 cm dhe ato formojnë kënd prej 30° . Syprina anësore është 10 cm^2 . Cakto vëllimin e paralelopipedit.
7. Bazat e piramidës së cunguar janë dy trekëndësha kënddrejtë barakrahas me hipotenuza 7 cm dhe 5 cm, përkatësisht. Cakto vëllimin e piramidës së cunguar nëse lartësia e saj është 12 cm.
8. Lartësia e një cilindri është e barabartë me diametrin. Syprina anësore është $104\pi \text{ cm}^2$. Cakto syprinën e bazës së cilindrit.
9. Syprina e prerjes boshtore të konit është 43 cm^2 . Cakto vëllimin e konit nëse lartësia e tij është $2\pi \text{ cm}$.
10. Syprina e prerjes së sferës me rrafsh është 15 cm^2 . Rrafshi gjendet në $\sqrt{\frac{30}{\pi}} \text{ cm}$ largësi qendrës së sferës. Cakto syprinën e sferës.
11. Baza e prizmit të drejtë është romb, kurse prerjet diagonale kanë syprinë 3 cm^2 dhe 4 cm^2 . Cakto syprinën anësore të prizmit.

12. Syprinat e bazave të piramidës katërfaqësore e rregullt të cunguar janë 1 cm^2 dhe 4 cm^2 . Cakto vëllimin e gjithë piramidës nëse piramida e cunguar e ka vëllimin 21 cm^3 .

13. Syprina anësore e cilindrit është 80 cm^2 . Prerja boshtore është katror. Cakto syprinën e cilindrit.

14. Syprina anësore e konit me gjeneratrisën $s = \frac{22}{\sqrt{30\pi}}$ është një e katërta e syprinës së rrethit me rreze $\sqrt{\frac{176}{\pi}}\text{ cm}$. Cakto syprinën e bazës së konit.

15. Rrezet e rrethit që fitohen kur rrafshi do ta pret topin është dy herë më e vogël prej topit. Cakto vëllimin e topit nëse prerja ka syprinën $5427 \cdot 10^3 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$

16. Për përpunimin e një gardhi janë të nevojshme 120 gypa metalik prej 1,8m. Baza e çdo gypi është trekëndësh barabrinjës me brinjë 5cm.

a) Njehso vëllimin e një gypi në m^3 ,

b) Sa denarë gjithsej kushtojnë gypat, nëse 1 m^3 kushton 2000 denarë?

PËRGJIGJE DHE UDHËZIME

1.1.

2. b), 3. c) и c), 4. a) $x \in \quad$, **b)** $x \in [-5, \infty)$, **c)** $x \in \quad$,
c) $x \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$. **5. a)** 2 , **b)** $\frac{1}{5}$, **c)** $-\frac{1}{2}$, **c)** $16 - 2x$

1.2.

1. a) $\sqrt[15]{3^{12}}$, **b)** $\sqrt[9]{a^6 b^3}$, **c)** $\sqrt[12]{(-2x)^6 y^9}$. **2. a)** $\sqrt{2}$, **b)** $\sqrt[4]{a^5 b^2}$, **c)** $4^5 x^{60} y^4$. **3. a)** $\sqrt[12]{2^6}, \sqrt[12]{3^4}$ и $\sqrt[12]{4^3}$,
b) $\sqrt[12]{\frac{a^4 b^2}{3^2}}, \sqrt[12]{\frac{a^3 b^6}{4^3}}$ и $\sqrt[12]{(2ab)^4}$. **4. a)** $3a^2, \sqrt[3]{2a^3 b}$ и $\sqrt{5b^3}$, **b)** $\sqrt[3]{3a^2 b^4}, \sqrt[4]{9a^3 b^6}$ и $\sqrt{a^5 b}$. **5. a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$,
b) $\sqrt{|a|}$, **c)** $\sqrt[3]{\frac{2a+1}{0,2a^2 b}}$.

1.3.

1. a) 160 , **b)** $10a$, **b)** $\frac{1}{210}$, **r)** $\frac{2a^3}{b^4 c^2}$. **2. a)** $\sqrt{a^{10} b^7 c^4}$, **b)** $6a$, **b)** $\sqrt[5]{2ab^2}$, **r)** $\sqrt[4]{\frac{16a}{b^2}}$. **3. a)** 240 ,
b) $\frac{3}{\sqrt[4]{|x|}}$, **b)** $-\frac{2xy^3}{z^4}$, **r)** $\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x} \cdot (x^2+1)}$, **3a)** $x > 0$. **4. a)** $\sqrt[12]{432x^{14}y^3}$, **b)** $\sqrt[3]{\frac{8x^3}{y}}$. **5. a)** $x+1 \geq 0$ т.е.
 $x \in [-1, \infty)$, **b)** $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

1.4.

1. a) $5\sqrt{2}$, **b)** $\frac{2}{5}\sqrt[3]{3}$, **b)** $\frac{x}{y^2}\sqrt[4]{2xy^2}$, **r)** $\frac{2a}{3b^3}\sqrt[5]{6a^3b^2}$. **2. a)** $\sqrt[3]{\frac{20}{7}}$,
b) $\sqrt{108ab^3}$, **c)** $\sqrt{a(a^2-1)}$, **c)** $\sqrt[4]{\frac{x^6 a^2}{3}}$.
3. a) $\frac{1}{xy}\sqrt{xy-y^2}$, **b)** $\frac{y}{2}\sqrt{2xby}$, **c)** $\frac{\sqrt[3]{a^2-ab}}{a-b}$, **r)** $\frac{2}{a}\sqrt[5]{a^2}$. **4. a)** и **b).**

1.5.

1. a) $6a^4$, **b)** $a^{12}\sqrt{ab^{11}c^6}$, **b)** $(-2)\sqrt[4]{(a-b)}$, **r)** $\sqrt[8]{2^7}$. **2. a)** $6a^4$, **b)** $a^{12}\sqrt{ab^{11}c^6}$, **b)** $-2\sqrt[4]{a-b}$,
r) $\sqrt[6]{ab^4c^2}$. **3. a)** $9\sqrt{2}$, **b)** $3\sqrt{a}-4\sqrt{a^2-1}$. **4. a)** $\frac{2}{5}$, **b)** 0 . **5)** $\sqrt{a}$.

1.6.

1. a) $\frac{\sqrt[3]{18}}{6}$, **b)** $5+\sqrt{\quad}$, **c)** $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x-y}$, **r)** $\sqrt[5]{a^2}$, **d)** $\frac{9-\sqrt{77}}{2}$, **e)** $5(3+2\sqrt{2})$,
e) $(a+2b)(\sqrt{a}-\sqrt{2b})$.

1.7.

1. a) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, **b)** $\frac{1}{\sqrt{a}}$, **b)** $\sqrt{(x+1)^3}$, **r)** $\frac{1}{\sqrt[4]{(x-y)^3}}$, **d)** $\sqrt[3]{(a+b)^2}$. **2. a)** $a^{\frac{1}{3}}$, **b)** $a^{\frac{2}{n-1}}$, **b)** $a^{\frac{3}{2}}$, **r)** $x^{\frac{2}{m}}$,
d) $(a-b)^{\frac{n}{4}}$. **3. a)** $x^{\frac{1}{6}}$, **b)** $x-y$, **b)** $8\frac{1}{3}$. **4. a)** $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$, **b)** $x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}$,
c) $x-2\sqrt{xy}+y$, **c)** $a^2+3a^{\frac{4}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}+1$.
5. a) $\frac{1}{x+2\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}$, **b)** $\frac{8a^8\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} = \frac{8a^8\sqrt{a}\sqrt{b}}{b^2}$.

1.8.

1. а) $x \in [-2, 3) \cup (3, \infty)$, б) $x \in (-2, \infty)$, в) $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, г) $x \in [0, 1) \cup (1, \infty)$. 3. -115.

4. 14. 5. Бидејќи дефиниционата област е $[0, 1) \cup (1, \infty)$, најмалиот природен број кој припаѓа во неа е 2.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. а) 16, б) 2, в) 0,3, г) $3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{5}$. 2. в) и г). 3. а) $x \in \mathbb{R}$, б) $x \in (-\infty, 3]$, в) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

г) $x \in (-\infty, -6] \cup [2, \infty)$. 4. а) 6, б) 5, в) $-\frac{1}{27}$, г) $-2x$. 5. а) $\sqrt[15]{3^{10}}$, б) $\sqrt[25]{a^{20}b^5}$,

в) $\sqrt[20]{(-3x)^{30}y^{10}}$. 6. а) $\sqrt[8]{2}$, б) $\frac{1}{3^5}$, в) $\sqrt{(6x^{12})^5y^6}$.

7. а) $\sqrt[12]{5^6}, \sqrt[12]{7^4}$ и $\sqrt[12]{2^3}$, б) $\sqrt[12]{\frac{a^8b^{16}}{5^4}}, \sqrt[12]{\frac{a^9b^6}{4^3}}$ и $\sqrt[12]{\frac{2^2a^4b^2}{5^2}}$.

8. а) $\sqrt{9a^3}, \sqrt[3]{8a^9b^3}$ и $\sqrt[6]{5a^5}$, б) $3a^2b^4, \sqrt{9a^3b^6}$ и $\sqrt[3]{5a^5b}$.

9. а) $-4x$, б) $\frac{3}{170}$, в) $\frac{2a^3}{b^4c^2}$, г) $a^6b^4c^7$, д) $60a^4$, е) $\sqrt[12]{32x^{15}y^2}$, ж) $\frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}(x^2+3)}$.

10. а) $x \in \left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$, б) $x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$. 11. а) $3\sqrt{10}$, б) $\frac{3}{10}\sqrt[3]{2}$,

в) $\frac{x^2}{y^2}\sqrt[4]{8x}$, г) $\frac{3a}{b^2}\sqrt[5]{\frac{a^4}{64b^2}}$. 12. а) $\sqrt[3]{425}$, б) $\sqrt{(a+3)(a+1)}$, в) $\sqrt[4]{\frac{4x^6a^2}{3}}$.

13. а) $\frac{1}{5ab}\sqrt[3]{180a^2b^2c}$, б) $\frac{1}{3x}\sqrt[4]{18x^3a^2y}$. 14. а) $9+2\sqrt{14}$, б) $a^2(1-2\sqrt{a}+a)$,

в) $\sqrt[80]{a^{75}} = \sqrt[16]{a^{15}}$, г) $8a^7 \cdot \sqrt[3]{a^4}$, д) $-3a\sqrt[6]{a-b}$, е) $\frac{\sqrt[5]{a^4b^4}}{ab}$. 15. а) $\frac{3}{4}$, б) $a^2 \cdot \sqrt[24]{a^{13}}$. 16. а) $\sqrt[4]{72}$,

б) $\frac{13-2\sqrt{30}}{7}$, в) $\sqrt{xy}$. 17. а) $\frac{3ab^3}{2}$, б) $-\sqrt{5}-\sqrt{3}$, в) $\frac{1}{2}$. 18. а) $x \in [0, 3) \cup (3, \infty)$,

б) $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$. 19. а) $12+5\sqrt{3}$, б) $\frac{2}{1-a^2}$.

Njësia modulare 2

2.1.

1.

Shkallë	0	30	45	60	90	180	270	360
radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

2. а) $\sin \beta = \frac{12}{13}$, $\cos \beta = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{5}{12}$,

б) $\sin \beta \approx 0,87$, $\cos \beta \approx 0,49$, $\operatorname{tg} \beta \approx 1,73$, $\operatorname{ctg} \beta \approx 0,58$.

3. а) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$.

б) $\sin \alpha \approx 0,78$, $\cos \alpha \approx 0,66$, $\operatorname{tg} \alpha \approx 1,24$, $\operatorname{ctg} \alpha \approx 0,8$. 4.10. 5. 12

2.2.

1. **a)** 0,54, **б)** 0,98, **в)** 0,84, **г)** 0,54. **2. a)** 60° , **б)** 70° . **3. a)** 3, **б)** $\frac{1}{2}$.
4. a) $2 \sin \alpha$, **б)** 0, **в)** $2 \sin^2 \alpha$. **5. a)** 1, **б)** 1, **в)** 1.

2.3.

1. **a)** 1, **б)** 1, **в)** 1, **г)** 1. **2. a)** $\frac{\sqrt{6}}{8}$, **б)** 1. **3. a)** 3, **б)** $-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$, **в)** 1.
4. a) $\sin 35^\circ < \sin 67^\circ$, **б)** $\cos 40^\circ < \cos 23^\circ$, **в)** $\operatorname{tg} 36^\circ < \operatorname{tg} 58^\circ$, **г)** $\operatorname{ctg} 73^\circ < \operatorname{ctg} 39^\circ$.
5. a) $\sin 45^\circ 17' 20'' < \sin 45^\circ 39' 34''$, **б)** $\cos 40^\circ 55' < \cos 40^\circ 12' 12''$,
в) $\operatorname{tg} 56^\circ 23' 55'' > \operatorname{tg} 56^\circ 12' 56''$, **г)** $\operatorname{ctg} 39^\circ 55' 77'' < \operatorname{ctg} 39^\circ 33' 6''$.

2.4.

1. **a)** $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}$, **б)** $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$,
в) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{4}$, **г)** $\sin \alpha \approx 0,92$, $\cos \alpha \approx 0,39$, $\operatorname{tg} \alpha \approx 2,44$,
2. a) $\sin^2 \alpha$, **б)** $-\cos^2 \alpha$, **в)** 1. **5. a)** $\frac{1-\sin^2 \alpha}{\sin \alpha}$, **б)** $\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$, **в)** $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$. **8.** $\frac{55}{54}$.

2.5.

1. $\beta = 53,8^\circ$, $a = 40,1 \text{ cm}$, $b = 54,9 \text{ cm}$. **2.** $\beta = 74,2^\circ$, $a = 11,7 \text{ cm}$, $b = 3,3 \text{ cm}$.
3. $\alpha = 24,6^\circ$, $b = 5,14 \text{ cm}$, $c = 5,65 \text{ cm}$. **4.** $\beta = 8^\circ$, $a = 1750,4 \text{ cm}$, $c = 1767,6 \text{ cm}$.
5. $\alpha = 45^\circ 57' 5''$, $\beta = 42^\circ 2' 55''$, $b = 224,48 \text{ cm}$.
6. $\alpha = 61^\circ 55' 39''$, $\beta = 28^\circ 4' 21''$, $c = 59,5 \text{ cm}$. **7.** $45^\circ 14' 23''$. **2.** $36^\circ 52' 12''$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. **a)** $34^\circ 24' 36''$, **б)** $18^\circ 16' 12''$, **в)** $23^\circ 40' 12''$. **2. a)** $36,43^\circ$, **б)** $45,19^\circ$, **в)** $73,87^\circ$.
3. a) $0,44 \text{ rad}$, **б)** $1,49 \text{ rad}$. **4. a)** 105° , **б)** $72^\circ 45' 56''$. **5. a)** 0, **б)** 2, **в)** $\frac{1}{\cos \alpha}$, $\alpha \neq 0$.
6. a) 65° , **б)** $47^\circ 10'$, **в)** 30° , **г)** 40° .
7. a) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$, **б)** $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$,
в) $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{3}$, **г)** $\sin \alpha = \frac{25}{\sqrt{674}}$, $\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{674}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{25}{7}$.
8. a) 7, **б)** -1. **9. a)** $\beta = 53^\circ 58'$, $a \approx 40$, $b \approx 55$, **б)** $\alpha = 25^\circ 40'$, $b \approx 936,43$, $c \approx 1038,94$,
в) $\alpha = 4^\circ 50'$, $a \approx 0,05$, $c \approx 0,622$, **г)** $\alpha = 45^\circ 57' 5''$, $\beta = 44^\circ 2' 55''$, $b \approx 222,48$,
11. $b = a \pm 2c \cdot \cos \alpha$, $h = c \sin \alpha$.

Njësia modulare 3

3.1.

1. **a)** $\operatorname{Re}(z) = 4$, $\operatorname{Im}(z) = 2$, **б)** $\operatorname{Re}(z) = -3$, $\operatorname{Im}(z) = 4$, **в)** $\operatorname{Re}(z) = -4$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$,

г) $\operatorname{Re}(z) = 1 + \sqrt{2}$, $\operatorname{Im}(z) = 1$. **2. а)** $z = 3 + \frac{1}{2}i$, **б)** $z = -\frac{1}{4} + (2 - \sqrt{2})i$.

3. а) $x = 5$, $y = -8$, **б)** $x = 5$, $y = 8$.

4. а) $\bar{z} = 7 - 5i$, **б)** $\bar{z} = -\frac{1}{4} + 6i$, **в)** $\bar{z} = \frac{1}{3}i$, **г)** $\bar{z} = 5$.

3.2.

1. а) $z_1 + z_2 = 7 + 9i$, **б)** $z_1 + z_2 = -40 - 30i$. **2. Да.** **3. а)** $z_1 - z_2 = 9 - 30i$, **б)** $z_1 - z_2 = 74 - 27i$.

4. а) $\operatorname{Re}(z) = 9$, $\operatorname{Im}(z) = 2$, **б)** $\operatorname{Re}(z) = -5$, $\operatorname{Im}(z) = -5$.

5. $\bar{z}_1 = 2 + i$, $\bar{z}_2 = -1 - 2i$, $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 1 - i$, $\overline{z_1 + z_2} = 1 - i$, $\overline{z_1 - z_2} = 3 + 3i$, и $\overline{z_1 - z_2} = 3 + 3i$.

3.3.

1. а) $z_1 z_2 = -54 + 48i$, **б)** $z_1 z_2 = 110 + 11i$. **2.** $\frac{1}{z} = \frac{1}{26} - \frac{5}{26}i$. **3. а)** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{3}i$, **б)** $\frac{z_1}{z_2} = 2 + \frac{1}{2}i$.

4. а) $\operatorname{Re}(z) = -2$, $\operatorname{Im}(z) = -1$, **б)** $\operatorname{Re}(z) = -1$, $\operatorname{Im}(z) = 1$, **в)** $\operatorname{Re}(z) = 2$, $\operatorname{Im}(z) = -3\sqrt{5}$.

3.4.

2. а) $|z| = 2\sqrt{5}$, **б)** $|z| = \sqrt{2}$, **в)** $|z| = \sqrt{5}$, **г)** $|z| = 2\sqrt{5}$, **д)** $|z| = 1$, **е)** $|z| = 2$.

3. $|z| = \sqrt{5}$, $|\bar{z}| = \sqrt{5}$, $|-z| = \sqrt{5}$, vlerat e fituara janë të barabarta.

4. $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$. **5.** $z_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{4\sqrt{5}}{5}i$, $z_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5}i$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. а) $\operatorname{Re}(z) = -1$, $\operatorname{Im}(z) = -1$, **б)** $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = 0$, **в)** $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{3}$, $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{2}$.

2. а) $\bar{z} = 7 + 5i$, **б)** $\bar{z} = \frac{1}{4}i$, **в)** $\bar{z} = 1 + \sqrt{3}i$.

3. а) $z_1 + z_2 = 12 + 2i$, $z_1 - z_2 = 2 - 4i$, **б)** $z_1 + z_2 = \frac{7}{12} - \frac{5}{6}i$, $z_1 - z_2 = -\frac{1}{12} - \frac{13}{6}i$.

4. а) $-z = 13 - \frac{1}{3}i$, **б)** $-z = \frac{1}{2} - (\sqrt{2} - 3)i$.

5. а) $\operatorname{Re}(z) = 5$, $\operatorname{Im}(z) = 4$, **б)** $\operatorname{Re}(z) = 6$, $\operatorname{Im}(z) = 5$.

6. а) $z_1 z_2 = 62 - 61i$, и $\frac{z_1}{z_2} = \frac{82}{85} - \frac{29}{85}i$, **б)** $z_1 z_2 = 24 + 48i$, и $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}i$.

7. а) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{5}$, $\operatorname{Im}(z) = -\frac{7}{5}$, **б)** $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$,

в) $\operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{5}$, $\operatorname{Im}(z) = -\frac{\sqrt{3} + 5\sqrt{2}}{5}$.

11. а) $\frac{\sqrt{37}}{2}$ **б)** $|z| = \frac{\sqrt{97 - 64\sqrt{2}}}{4}$.

Njësia modulare 4

4.1.

1. а) Jo, **б)** Po, **в)** Jo. **2. а)** Po, **б)** $x = 1$ Nuk është në fushën e përkufizimit të barazimit ,

в) Po. **3. а)** $3x^2 - 3x + 2 = 0$, **б)** $4x^2 - 16 = 0$, **в)** $x^2 - 3x - 6 = 0$, $x \neq 4$.

4. а) $x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} = 0$, б) $x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0$, в) $x^2 + \frac{2}{3}x = 0$.

5. а) По, б) Јо, в) По.

4.2.

1. а) $x = 0$, б) $y = 0$, в) За $k \neq 0$ згjidhje është $x = 0$, për $k = 0$ згjidhje në çdo numër real x . 2. а) $x_1 = 0$ и $x_2 = 7$, б) $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$, в) $x_1 = 0$ и $x_2 = 6$, г) $x_1 = 0$ и $x_2 = -10$,

д) $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$, ё) $x_1 = 0$ и $x_2 = 9$.

3. а) $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$, б) $x_1 = -\sqrt{2}$ и $x_2 = \sqrt{2}$, в) $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

г) $x_1 = -5$ и $x_2 = 5$, д) $y_1 = -\frac{4}{5}$ и $y_2 = \frac{4}{5}$, ё) $z_1 = -\frac{3}{4}$ и $z_2 = \frac{3}{4}$.

4. а) $x_{1,2} = \pm i$, б) $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}i$, в) $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{14}}i$, г) $y_{1/2} = \pm 2i$, д) $x_{1,2} = \pm \sqrt{6}i$, ё) $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}i$.

6. а) $a, b \neq 0$, ако $b > 0$ решенија се $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{b}}{a}i$, ако $b < 0$ решенија се $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{-b}}{a}$,

б) $a, b \neq 0$, решенија се $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a^2}$.

4.3.

1. а) $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, б) $x_1 = -9$ и $x_2 = 10$, в) $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$,

г) $x_1 = -3 - \sqrt{5}$ и $x_2 = -3 + \sqrt{5}$, д) $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}$ и $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$,

ё) $x_1 = -3 - \sqrt{3}$ и $x_2 = -3 + \sqrt{3}$.

2. а) $x_1 = -7$ и $x_2 = 1$, б) $x_1 = -9$ и $x_2 = 7$, в) $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{3}i$,

г) $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$, д) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{3}$.

3. а) $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{3}{5}$, б) $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{7}{3}$, в) $x_1 = -\frac{3}{2}i$ и $x_2 = \frac{3}{2}i$, г) $x_1 = -7$ и $x_2 = 7$,

д) $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$, ё) $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

4. а) $x_1 = -\frac{m}{2}$ и $x_2 = -\frac{m}{3}$, $m \in \mathbb{R}$, б) $x_1 = \frac{a}{2b}$ и $x_2 = \frac{b}{2a}$, $a, b \neq 0$.

4.4.

1. а) $D = 24$, б) $D = 2$, в) $D = -4$, г) $D = -8$, д) $D = 25$, ё) $D = 16$.

2. а) Ка, б) Ка, в) Ка, г) Ка, д) Ка, ё) Ка.

3. а) Nuk ka, б) Ка, в) Ка, г) Ка, д) Ка, ё) Ка.

4. а) Ка, б) Ка, в) Nuk ka, г) Ка, д) Ка, ё) Ка, е) Ка rrënjë të dyfishtë

6. а) $k \leq 2$, б) $k > 2$.

4.5.

1. а) $x_1 + x_2 = 3$, $x_1x_2 = 2$, б) $x_1 + x_2 = -2$, $x_1x_2 = -1$, в) $x_1 + x_2 = 37$, $x_1x_2 = 27$,

г) $x_1 + x_2 = 0$, $x_1x_2 = -15$, д) $x_1 + x_2 = 7$, $x_1x_2 = 3$, ё) $x_1 + x_2 = \frac{a^2 + 9}{a}$, $x_1x_2 = -\frac{9}{a}$, $a \neq 0$.

2. а) $x^2 + 2x - 35 = 0$, б) $x^2 + 8x + 15 = 0$, в) $2x^2 + 5x - 12 = 0$, г) $10x^2 + 19x + 6 = 0$,

д) $x^2 + 3\sqrt{3}x - 30 = 0$, ё) $x^2 - 6x + 4 = 0$.

- 3. а)** $x_1 = 4$ и $x_2 = 5$, **б)** $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{5}{6}$, **в)** $x_1 = -12$ и $x_2 = 1$, **г)** $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$,
д) $x_1 = 1$ и $x_2 = 2p$, **ё)** $x_1 = -3a$ и $x_2 = 1$.
4. а) $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, **б)** $3x^2 - 9x - 12 = 3(x+1)(x-4)$,
в) $2x^2 - 72 = 2(x-6)(x+6)$. **5.** $m = \frac{5}{2}$. **6.** $-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$, $-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$. $m = \frac{5}{2}$. **7.** $8x^2 + 2x - 1 = 0$.

4.6.

- 1.** Numrat janë 12 dhe 13. **2.** Perimetri i drejtkëndëshit 32 cm.
3. Janë të nevojshme 85 m tel. **4.** Çmimi është zvogëluar për 10%.
5. 15 orë për gypin më të ngushtë, kurse 10 orë për më të gjerë.

4.7.

- 1. а)** $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{4}, 2\right\}$, **б)** $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$.
2. а) За ниту една вредност на x , **б)** $x = -27$, **в)** $x = 1$.
3. а) $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, **б)** $\emptyset$, **в)** $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$, **г)** $\{1\}$, **д)** $\emptyset$, **ё)** $\left\{0, \frac{1}{3}\right\}$.
4. а) $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$, **б)** $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{2}$, **в)** $x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{469}}{2}$, **г)** $x_1 = -8$ и $x_2 = 1$.
5. За $a \neq 0$ решение е $x = 0$, а за $a \neq 1$ решение е $x = \frac{a^2 + 2b + a}{1 - a}$.

DETYRA PËRPËRSËRITJE

- 1. а)** Barazimi linear me një të panjohur, **б)** Barazim të shkallës së katërt me një të panjohur, **с)** Barazim katror me dy të panjohura.
2. а) $x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{4} = 0$, **б)** $x^2 + 2x + 5 = 0$, **в)** $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0$. **3. а)** $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$,
б) $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$, **в)** $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{b}{a-1}$, за $a \neq 1$.
4. а) $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}i$, **б)** $x_{1,2} = \pm \frac{5}{2}$, **в)** $x_{1,2} = \pm(a-b)$.
5. а) $x_1 = 6$ и $x_2 = -7$, **б)** $x_1 = -13$ и $x_2 = 11$, **в)** двоен корен $x = 9$, **г)** $x_1 = -5$, и $x_2 = 7$,
д) $x_1 = -10a$ и $x_2 = 2a$.
6. а) Për çdo $a \in \mathbb{C}$, **б)** PBarazimi nuk ka rrënjë komplekse të konjuguara për asnjë vlerë të parametrin a .
7. а) $\frac{2(x-5/2)}{x+3}$, **б)** $-\frac{(x+2)}{(x+5)}$, **в)** $\frac{7(a-2/7)}{3(a-1/3)}$.
8. а) $p \neq 1$, **б)** $p = 1$, **в)** $p = \frac{9}{8}$, **г)** $p < \frac{9}{8}$.
9. 84 km/h dhe 63 km/h **10.** Gjerësia e rrugës është 12 m.
11. а) $x = 3$, **б)** $x_1 = -6$. **12.** Kamioni i parë do ta kalon gjithë rrugën për 10 orë me shpejtësi prej 30 km/h por kamion i dytë për 12 orë me shpejtësi prej 25 km/h.

Njësia modulare 5

5.1.

1. Barazime bikatrore janë nën: a), b), c) dhe d).

2. a) $x_{1,2} = \pm 5$, $x_{3,4} = \pm \frac{1}{3}$, б) $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \pm \frac{2}{3}$, в) $t_{1,2} = \pm 2$, $t_{3,4} = \pm 3$, г) $x_{1,2} = \pm \sqrt{5}$,

д) $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, і) $x = 0$.

3. a) $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, б) $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$, в) $t_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$, $t_{3,4} = \pm 2$, г) Nuk ka zjidhje reale

д) $x_{1,2} = \pm \frac{3}{8}$, $x_3 = 0$, і) $x_{1,2} = \pm \frac{3}{\sqrt{7}}$.

4. a) 4, б) 0, в) 4, г) 0, д) 2, і) 2.

5. a) $(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = 0$, б) $4(y+\frac{5}{2})(y+1)(y-1)(y-\frac{5}{2}) = 0$.

6. a) $\frac{x^2+4}{x^2-9}$, $x \neq \pm 2$, б) $\frac{x^2-3}{x^2-9}$, $x \neq \pm 2\sqrt{2}$.

5.2.

1. a) $x_1 = 4$, $x_{2,3} = -2 \pm 2i\sqrt{3}$, б) $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 3i$, в) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{3}$, $x_{5,6} = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$,

г) $x_1 - 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 4$, д) $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{-2 \pm i\sqrt{5}}{3}$, і) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{3}$.

5.3.

1. Barazime iracionale janë nën b) dhe ç).

2. a) Jo, б) Po, в) Po, г) Po.

3. a) $\{1\}$, б) $\{3\}$, в) $\{-2, 2\}$, г) $\left\{\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right\}$, д) $\left\{-9, \frac{9}{2}\right\}$, і) $\emptyset$.

4. a) $x = 13$, б) $x = 77$, в) $x_{1,2} = \pm 1$.

5. a) $x = 5$, б) $x = 3$, в) $x = \frac{2}{3}$, г) Nuk ka zjidhje reale

5.4

1. a) $x_1 = -1$, $x_2 = 27$, б) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, в) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{4}$, г) $x = 9$.

3. a) $x = 1$, б) $x = -\frac{5}{3}$, в) $x = -2$, г) $x = -1$.

5.5.

1. Sistemi prej barazimit linear dhe katror me dy të panjohura janë: a), b) dhe d).

2. a) $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + 12 \\ x^2 + \sqrt{2}xy - y^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$, в) $\begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1}{2}x^2 + xy + 3y^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$,

г) $\begin{cases} -x + y - 10 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2x - 6y + \frac{37}{2} = 0 \end{cases}$, д) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \sqrt{3}y = 0 \\ x^2 + 3y = 0 \end{cases}$.

3. а) $m=3$, $n=-1$, $p=1$, $a=3$, $b=1$, $c=1$, $d=1$, $e=-1$ и $f=-1$.

б) $m=-1$, $n=\frac{1}{3}$, $p=12$, $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=-3$, $d=0$, $e=0$ и $f=-4$.

4. а) Да, **б)** Не, **в)** Не.

5. а) Ёсштё згjidhje, **б)** Нук ёсштё згjidhje, **с)** Ёсштё згjidhje, **д)**

Нук ёсштё згjidhje

6. а) $\{(3,5), (5,3)\}$ **б)** $\{(-3,-9), (3,9)\}$ **в)** $\left\{\left(\frac{-3+\sqrt{105}}{4}, \frac{3+\sqrt{105}}{6}\right), \left(\frac{-3-\sqrt{105}}{4}, \frac{3-\sqrt{105}}{6}\right)\right\}$

г) $\{(2,1), (-14,17)\}$ **д)** $\left\{\left(\frac{76+4\sqrt{166}}{13}, \frac{36+6\sqrt{166}}{13}\right), \left(\frac{76-4\sqrt{166}}{13}, \frac{36-6\sqrt{166}}{13}\right)\right\}$.

7. Згjidhje reale канё системет: а), д) dhe dh), згjidhjet комплексне канё системет б), с) dhe д)

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. а) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 3$, **б)** $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$.

2. а) $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm 3$, **б)** $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = \pm 2$. **3. а)** $\{\pm 1, \pm 4\}$, **б)** $\emptyset$.

4. а) $y^2 - 4$, **б)** $\frac{x^2 - 5}{x^2 - 1}$. **5. а)** $x = 3$, **б)** $x = 1$. **6. а)** $x = 3$, **б)** $x_{1,2} = \pm 1$.

8. а) $(1,1)$ и $\left(-\frac{3}{7}, -\frac{13}{7}\right)$, **б)** $\left(-\sqrt{\frac{2302}{5}}, 24 - \sqrt{\frac{1151}{10}}\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{2302}{5}}, 24 + \sqrt{\frac{1151}{10}}\right)$.

9. а) $\left(-2 - i\sqrt{\frac{31}{2}}, 2 - i\sqrt{\frac{31}{2}}\right)$ и $\left(-2 + i\sqrt{\frac{31}{2}}, 2 + i\sqrt{\frac{31}{2}}\right)$, **б)** $(3,9)$, $(-3,-9)$.

10. а) $\left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{105}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{105}}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{35}}{2}\right)$,

б) $\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)$ и $\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)$.

Njësia modulare 6

6.1.

6. а) $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}$, **б)** $f(x) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$, **в)** $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$,

г) $f(x) = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$, **д)** $f(x) = -\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$, **ё)** $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

6.2.

1. $x = \frac{3}{4}$. **2. а)** 3, **б)** 17, **в)** 10. **3. а)** $-\frac{1}{4}$ и 1, **б)** 1 и 5, **в)** нема нули, **г)** -2 и 4, **д)** $\frac{-3-\sqrt{6}}{2}$ и $\frac{-3+\sqrt{6}}{2}$, **ё)** нема нули. **4.** Не, затоа што $D < 0$. **5.** Да, на пример $f(x) = (x-3)^2 - 2$.

6.3.

1. а) За $x = -\frac{3}{4}$ има минимум $\frac{31}{8}$, б) За $x = \frac{3}{2}$ има максимум $\frac{25}{4}$,
 в) За $x = \frac{5}{2}$ има минимум $\frac{1}{4}$, г) За $x = 1$ има максимум 9,
 д) За $x = -\frac{3}{2}$ има минимум -2, ђ) За $x = 0$ има минимум $\frac{2}{3}$.
 2. а) $T\left(\frac{3}{8}, \frac{25}{16}\right)$, б) $T(3, -2)$, в) $T\left(-\frac{3}{4}, \frac{31}{8}\right)$, г) $T\left(3, -\frac{3}{4}\right)$, д) $T\left(\frac{3}{4}, \frac{17}{8}\right)$, ђ) $T(0, 5)$.
 3. а) расте на $\left(-\infty, -\frac{3}{8}\right)$, опаѓа на $\left(-\frac{3}{8}, +\infty\right)$,
 б) опаѓа на $(-\infty, -3)$, расте на $(-3, +\infty)$, в) опаѓа на $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$, расте на $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$,
 г) опаѓа на $(-\infty, -3)$, расте на $(-3, +\infty)$, д) расте на $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$, опаѓа на $\left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$,
 ђ) расте на $(-\infty, 0)$, опаѓа на $(0, +\infty)$.
 4. Постои, тоа е функцијата $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$.

6.4.

1. а) позитивна за секој реален број x ,
 б) позитивна за $x \in (-1, 4)$, негативна за $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$,
 в) позитивна за секој реален број x , освен за $x = \frac{2}{3}$.
 2. а) $x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{7}}{2}, +\infty\right)$, б) негативна за секој реален број x ,
 в) $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.
 3. а) позитивен, б) позитивен за $x \in (2, 4)$, негативен за $x \in (4, 5)$, в) позитивен за $x \in (7, 9)$,
 негативен за $x \in (6, 7)$, г) позитивен.

6.5.

1. а) една непозната, б) една непозната, в) две непознати, г) три непознати.
 2. а) равенка од прв степен, б) равенка од втор степен, в) равенка од петти степен,
 г) равенка од четврти степен.
 3. а) $3x^2 - 3x + 2 > 0$, б) $4x^2 - 16 > 0$, в) $x^2 - 8x + 5 < 0$, г) $\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 < 0$.
 4. а) е решение, б) е решение, в) не е решение,
 г) не е решение, не е во дефиниционото множество на неравенката.
 5. а) $x = \frac{2}{3}$, б) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{7}\right\}$, в) $\emptyset$, г) $x \in \mathbb{R}$, д) $x \in [-2, 7]$, ђ) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup (9, +\infty)$.

6.6.

1. а) $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, б) $x \in \left(-1, \frac{4}{3}\right)$, в) $x \in \left\{-1, \frac{4}{3}\right\}$.
 2. а) $x \in (-2, 2)$, б) $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, в) $\emptyset$, г) $x \in \mathbb{R}$, д) $x \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$,
 ђ) $x \in (-\infty, -8) \cup (5, +\infty)$.

3. а) $x \in (1, 7)$, б) $\mathbb{R}$, в) $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, г) $x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$, д) $\emptyset$,

ђ) $x \in \left(-\infty, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$.

4. а) $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, б) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (4, +\infty)$, в) $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, г) $x \in (0, 13]$,

д) $x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$, ђ) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

6.7.

1. Да. 2. а) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, б) $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, в) $\emptyset$.

3. а) $x \in (-8, -5]$, б) $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$, в) $x \in [-2, 1]$.

4. а) $x \in (-3, 1)$, б) $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, в) $x \in [1, 14]$.

5. а) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$, б) $x \in \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$, в) $x \in [-3, 2]$.

6.8.

1. а) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$, б) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{7}\right\}$, в) $\emptyset$, г) $\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

2. а) $x \in (-\infty, -3] \cup [-2, 2] \cup [3, +\infty)$, б) $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$, в) $x \in (1, 3)$, г) $x \in [-7, 1] \cup [2, 3]$.

3. а) $x \in (-3\sqrt{3}, 0] \cup \left[\frac{8}{3}, 3\sqrt{3}\right)$, б) $x \in (-\infty, -13) \cup (-2, 4) \cup (11, +\infty)$,

в) $x \in (-9, -1) \cup (5, 10)$.

4. а) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 4\right) \cup (4, +\infty)$, б) $x \in [-3, 2] \cup (4, 7)$, в) $\emptyset$.

5. Броевите се 3 и 4.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. а) 0 и -1, б) нема нули, в) -1. 2. $T\left(-\frac{1}{3}, 5\right)$.

3. а) позитивна за $x \in \left(-\infty, \frac{37 - \sqrt{1345}}{12}\right) \cup \left(\frac{37 + \sqrt{1345}}{12}, +\infty\right)$,

негативна за $\left(\frac{37 - \sqrt{1345}}{12}, \frac{37 + \sqrt{1345}}{12}\right)$,

б) позитивна за $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, негативна за $x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$,

в) негативна за секој реален број x .

4. $m = -2$ и $m = 3$, за $m = -2$ темето е $T\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, за $m = 3$ темето е $T(-2, -7)$.

6. а) $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$, б) $x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$, в) $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty)$, г) $\mathbb{R}$,

д) $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$, г) $x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$.

7. а) $x \in \left[-\frac{1}{5}, -\frac{1}{8}\right)$, б) $x \in \left(\frac{1-\sqrt{311}}{2}, \frac{1+\sqrt{311}}{2}\right)$, в) $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

8. а) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$, б) $x \in (-\infty, -4) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, в) $\emptyset$.

9. а) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 2\right) \cup (2, +\infty)$, б) $x \in [-3, 1] \cup (3, 7)$, в) $x \in \left(-\frac{3}{2}, 4\right) \cup (4, 7)$.

10. Бројот 4.

Njësia modulare 7

7.1.

1. в), г), д); 2. а), в), г); 3) а) Колинеарни се $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$, а колинеарни се и $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$

б) Истонасочени се $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ в) $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$, г) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$

7.2.

1. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \vec{a}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$,

$\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$,

$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$.

2. $\overrightarrow{DA} = -\vec{b} + \vec{a}$, $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = -2\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BE} = -2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$,

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CD} = 2\vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{ED} = \vec{a} + \vec{b}$.

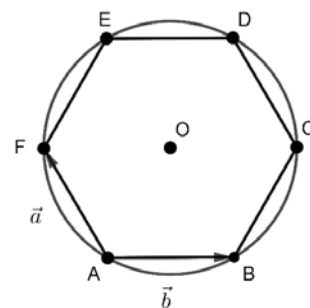
3. $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{a}$,

$\overrightarrow{FB} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -\vec{a} - 2\vec{b}$,

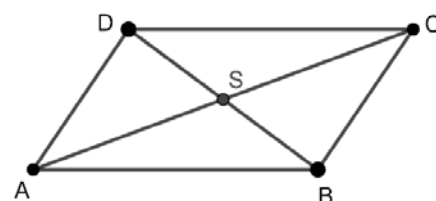
$\overrightarrow{FE} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OA} = -\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CE} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\overrightarrow{CF} = -2\vec{b}$ (цртеж 1).

4. а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DS}$, б) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC}$,

в) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} = \vec{0}$ (цртеж 2)..



vizatimi 1



vizatimi 2

7.3.

1. Од равенствата: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ и

$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, следува

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}),$$

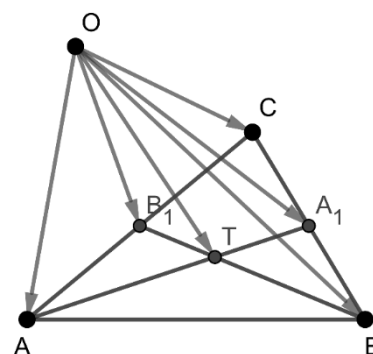
т.е. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\vec{0} + \frac{1}{2}\vec{0} + \frac{1}{2}\vec{0} = \vec{0}$. 2. Нека AA_1 и BB_1

се две различни тежишни линии на $\triangle ABC$ (цртеж 3).

Тогаш T ја дели отсечката BB_1 во однос $\overrightarrow{BT} : \overrightarrow{TB_1} = 2 : 1$.

Ако T_1 е средина на BT , тогаш имаме

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OT_1}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OB}}{2}\right), \text{ па следува}$$



vizatimi 3

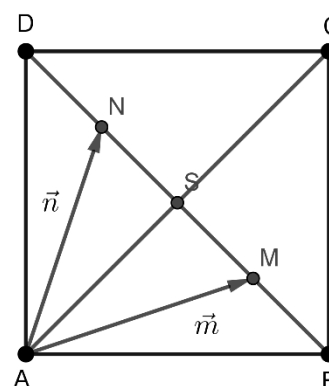
$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB_1}$. Бидејќи B_1 е средина на AC имаме

$\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$. Конечно

$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

3. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \vec{m} + \vec{n}$, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN} = 2(-\vec{m} + \vec{n})$ и

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} = \vec{m} + \frac{1}{2}(-\vec{n} + \vec{m}) = \frac{1}{2}(3\vec{m} - \vec{n})$ (цртеж 4).



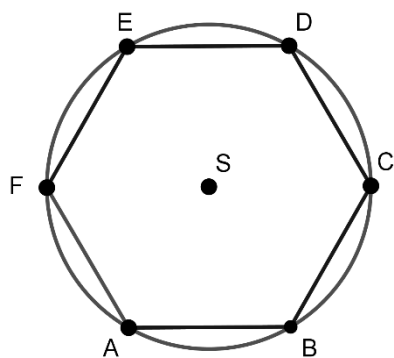
vizatimi 4

4. а) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CS}$, б) $\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$,

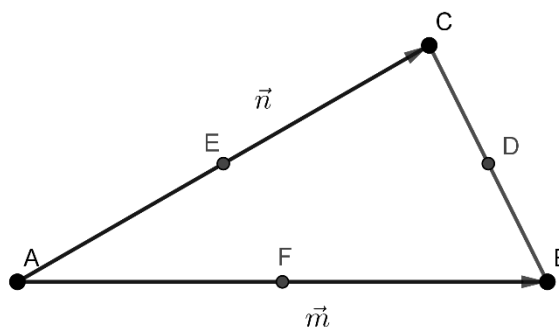
в) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ES} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AS}$ и

г) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{DE}$ (цртеж 5).

5. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\vec{m} + \vec{n})$, $\overrightarrow{BE} = -\vec{m} + \frac{\vec{n}}{2}$ и $\overrightarrow{CF} = -\vec{n} + \frac{\vec{m}}{2}$ (цртеж 6).



vizatimi 5



vizatimi 6

7.4.

1. Паси bashkësia e pikave në hapësirë P është e pafundshme vijon se ekziston pikë $B \neq A$, prej **A₅** vijon se ekziston drejtëz e vetme e cila kalon nëpër pikat A dhe B. Prej **A₄** vijon se ekziston pikë C e cila nuk shtrihet te drejtëza AB. Domethënë, A, B dhe C nuk janë pika kolineare.

2. Prej detyrës 1, vijon se ekzistojnë pika B dhe C të atilla që A, B dhe C nuk janë pika kolineare. Domethënë, drejtëza $BC = a$ nuk kalon nëpër pikën A.

3. Prej **A₆** vijon se ekzistojnë pika B, C dhe D të atilla që A, B, C dhe D nuk janë komplanare. Prandaj, ato rrafshet ABC, ABD dhe BCD kalojnë nëpër pikën A.

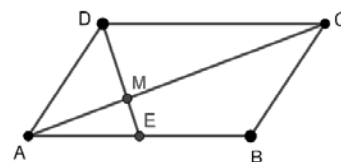
7.5.

1. 1. Drejtëza b e pret drejtëzën a ose drejtëzat janë aplanare. 2. а) Është e saktë, pasi pika e depërtimit është pikë e përbashkët, б) Është e saktë, pasi pikëprerja është e vetme (b nuk shtrihet në Σ), в) Po, pasi drejtëzat priten, г) Prej përkufizimit për paralelizëm të drejtëzës dhe rrafshit vijon se edhe ky gjykim është i saktë. 3. а) Pika B, pasi në të kundërtën $B \equiv A$, б) Pika A, pasi në të kundërtën $A \equiv B$.

7.6.

1. Jo, pasi nëse dy rrafshet priten në dy pika, atëherë ato priten në pafund shumë pika, d.m.th., prerja e tyre është drejtëz. 2. а) Да постои, тоа е правата која минува низ точките A и

7. Точките A, M и C се колинеарни, па $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$, а точките D, M и E се колинеарни, па $\overrightarrow{DM} = m\overrightarrow{DE}$. Од тоа што $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD}$, се добива дека $k = \frac{1}{3}$ и $m = \frac{2}{3}$ од каде следува бараниот однос (цртеж 10).



Цртеж 10

8. а) Да може, ако и само ако точката C лежи на кружница со центар во точката A и радиус $\overline{AB}$. б) Не. Бидејќи $\overline{AB} = \overline{AC}$, следува дека мора $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ да се колинеарни вектори, со иста насока и иста почетна точка. Сподред тоа точките B и C се совпаѓаат, што не е можно. 9. Нека A е произволна точка. Тогаш постојат точки B и C такви што A, B и C не се колинеарни. Правите AB, BC и AC не минуваат низ иста точка. 10. Нека дадените точки ги означиме со A, B, C, D и E . Ако сите пет точки се колинеарни, тогаш тие определуваат единствена права. Ако четири од нив се колинеарни, на пример точките A, B, C и D , тогаш тие образуваат права AB , а со точката E може да образуваме четири прави (AE, BE, CE и DE). Ако, пак, три од нив се колинеарни, на пример A, B и C , а другите две точки не се колинеарни со ниту една од нив, тогаш може да се образуваат 8 прави ($AB, AD, AE, BD, BE, CD, CE$ и DE). Ако, на пример, колинеарни се точките A, B, C и A, D, E , тогаш може да формираме 6 прави (AB, AD, BE, BD, CD и CE). Останува случајот кога ниту една тројка точки не се колинеарни, тоа значи дека прави може да образуваат сите парови точки. Такви се 10 прави. 11. Ако A, B, C и D се компланарни, тогаш тие определуваат единствена рамнина. Ако три од нив се компланарни, на пример A, B и C , тогаш тие ја определуваат рамнината ABC , а од тоа што D не е компланарна со нив рамнини се и ABD, BCD и ACD . 12. а) Не е точно, бидејќи точките мора да се неколинеарни, б) Не е точно, бидејќи правите во општ случај може да се разминувачки, в) Не е точно, бидејќи може точката да лежи на правата.

Njësia modulare 8

8.1.

1. Најмалиот број на сидови на призма е 5, (три бочни и два основни), 6 темиња и 9 рабови. 2. Бројот на рабови кај секоја призма е делив со 3. а) не, б) да, петстрана (петаголна) призма, в) не. 4. Не. 5. Едно решение се рамнините: ABB_1A_1 , ABD и ABD_1 .

8.2.

1. 130 cm^2 . 2. 6 cm и 8 cm. 3. 300 cm^2 и 720 cm^2 . 4. $36\sqrt{2}\text{ cm}^2$. 5. $18\sqrt{2}\text{ cm}^2$

8.3.

1. $V = 1755\text{ cm}^3$. 2. $P = 72\text{ cm}^2, V = 36\text{ cm}^3$. 3. $V_1 = \frac{26}{27}V$. 4. 405 cm^3 . 5. 360 cm^3 .

8.4.

1. $\sqrt{91}\text{ cm}$. 2. 100 cm^2 . 3. $\sqrt{302}\text{ cm}$. 4. 12 cm. 5. $\frac{25\sqrt{2}}{4}\text{ dm}^2$

8.5.

1. $\frac{880}{3}\text{ cm}^3$. 2. 2,5 dm. 3. $H = 24\sqrt{3}\text{ cm}, s = \sqrt{1729}\text{ cm}$. 4. 60 cm^3 . 5. $112,5\sqrt{3}\text{ cm}^3$. 6. 192 cm^3

8.6.

1. $76\sqrt{3}\text{ cm}^3$. 2. $20\text{ m}^2, 45\text{ m}^2$. 3. $P = 324, V = 126\sqrt{7}$. 4. 1140 m^3 . 5. 70 cm и 20 cm

8.7.

1. а) Првиот и третиот цилиндар имаат висина a , а вториот има висина $2a$, б) Радиусот на првиот цилиндар е a , а на вториот и третиот $2a$. 2. 30cm . 3. 36cm^2 . 4. 196cm^2 . 5. $\frac{20\sqrt{3}}{3}\text{cm}$

8.8.

1. 30cm^2 . 2. $960\pi\text{cm}^3$. 3. $88\pi\text{cm}^2$. 4. $200\pi\text{cm}^2$. 5. $96\pi\text{cm}^3$

8.9.

1. 48cm^2 . 2. $r = 2\text{cm}, H = 2\sqrt{3}\text{cm}$. 3. 100cm^2 . 4. 20cm . 5. πcm^2

8.10.

1. а) $96\pi\text{cm}^2$, б) $980\pi\text{cm}^2$, в) $2.24\pi\text{cm}^2$. 2. 69cm . 3. $243\sqrt{3}\pi\text{cm}^3$. 4. $320\pi\text{cm}^3$. 5. $1800\pi\text{cm}^2$

8.11.

1. $195\pi\text{cm}^2$. 2. $400\pi\text{cm}^2$. 3. $4,92\text{l}$. 4. $457\pi\text{cm}^3$. 5. $1,5\text{dm}$ и $15,5\text{dm}$

8.12.

1. $R = 18\text{cm}$. 2. $P = 8739\pi\text{cm}^2, V = 34182\pi\text{cm}^3$. 4. $\sqrt[3]{\frac{1628}{3}}\pi\text{cm}$. 5.

DETYRA PËRPËRSËRITJE

1. 54cm^2 . 2. 3. 3. 127cm . 4. 420cm . 5. 17cm . 6. 4. 7. 109cm^3 . 8. 26cm^2 . 9. 8cm^3 . 10. 180cm^2 .

11. 10cm^2 . 12. 24cm^3 . 13. 120cm^2 . 14. 120cm^2 . 15. $\frac{5000}{5427}\text{m}^3$. 16. а) $V = 1,9486 \cdot 10^{-3}\text{m}^3$, б) 468

денари.

PËRMBAJTJA

PARATHËNIE	3
1.RRËNJËT	5
1.1. Koncepti për rrënjë	5
1.2. Zgjerimi dhe thjeshtimi i rrënjëve	6
1.3. Rrënjëzimi i prodhimit dhe herësit	8
1.4. Nxjerrja e shumëzuesit para shenjës së rrënjës, futja e shumëzuesit nën shenjën e rrënjës dhe forma normale e rrënjës	10
1.5. Operacionet me rrënjë	13
1.6. Racionalizimi i emëruesit të thyesës	15
1.7. Fuqia me tregues numër racional	16
1.8. Shprehje iracionale	19
2.FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE NË TREKËNDËSHIN KËNDDREJTË	23
2.1. Funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë	23
2.2. Funksionet trigonometrike të këndeve komplementare	26
2.3. Vlerat e funksioneve trigonometrike të disa këndeve	28
2.4. Lidhja ndërmjet funksioneve trigonometrike të këndit të njëjtë	30
2.5. Zgjidhja e trekëndëshit kënddrejtë dhe zbatimi	32
3.NUMRAT KOMPLEKS	36
3.1. Koncepti për numrat kompleks	36
3.2. Mbledhja dhe zbritja e numrave kompleks	38
3.3. Shumëzimi dhe pjesëtimi i numrave kompleks	40
3.4. Paraqitja gjeometrike e numrit kompleks . Moduli i numrit kompleks.....	43
4.BARAZIMI KATROR	47
4.1. Barazimi katror. Llojet e barazimeve katrore	47
4.2.Zgjidhja e barazimit jo të plotë katror	48
4.3. Zgjidhja e barazimit të plotë katror	50
4.4. Diskutimi i zgjidhjeve të barazimit të plotë katror	53
4.5. Formulatat e Vietit për lidhjen ndërmjet rrënjëve dhe koeficientëve të barazimit katror	55
4.6. Zbatimi i formulave katrore	60
4.8. Barazimit racionale katrore	61
5. BARAZIMET PREJ LLOJIT KATROR. BARAZIMET IRACIONALE. SISTEMI PREJ NJË BARAZIMI KATROR DHE NJË BARAZIMI KATROR DHE NJË BARAZIMI LINEAR ME DY TË PANJOHURA	66
5.1. Barazimet bikatrore	66
5.2. Barazimet që sillen në katrorë me zëvendësim përkatës	69
5.3. Barazimet iracionale	72
5.4. Zgjidhja e barazimeve iracionale me metodën e zëvendësimit të ndryshores	75
5.5. Sistemi prej barazimit linear dhe katror me dy të panjohura	77

6. FUNKSIONI KATROR, PABARAZIMI KATROR, SISTEMI DHE BASHKËSIA PREJ PABARAZIMEVE KATRORE ME NJË TË PANJOHUR	83.....
6.1. Koncepti për funksion katror	83
6.2. Vlerat ekstreme dhe intervalet e monotonies të funksionit katror	87
6.3. Grafiku i funksionit katror.....	89
6.4. Shenja e funksionit katror	92
6.5. Pabarazimi katror me një të panjohur	95
6.6. Zgjidhja e pabarazimit katror me zbërthim	98
6.7. Sistemi dhe bashkësia prej dy pabarazimeve katrore me një të panjohur	100
6.8. Zbatimi i sistemit të pabarazimeve katrore	103
7. VEKTORI NË RRAFSH. GJEOMETRIA E FIGURAVE NË HAPËSIRË	106
7.1. Koncepti për vektor	106
7.2. Operacionet me vektor	109
7.3. Zbatimi i vektorëve	112
7.4. Aksiomat për gjeometrinë në hapësira	114
7.5. Pozita reciproke e drejtëzës dhe rrafshit në hapësirë	117
7.6. Pozita reciproke e dy rrafsheve në hapësirë	119
7.7. Pozita reciproke e dy drejtëzave në hapësirë.....	120
8. SYPRINA DHE VËLLIMI I TRUPAVE GJEOMETRIK	122
8.1. Koncepti për prizmin	122
8.2. Prerjet e prizmit me rrafsh	123
8.3. Syprina dhe vëllimi i prizmit	125
8.4. Piramida. Prerjet e piramidës me rrafsh	128
8.5. Syprina dhe vëllimi i piramidës	131
8.6. Syprina dhe vëllimi i piramidës së cinguar	133
8.7. Cilindri. Prerjet e cilindrit me rrafsh	135
8.8. Syprina dhe vëllimi i cilindrit	137
8.9. Koni. Prerjet e konit me rrafsh	139
8.10. Syprina dhe vëllimi i konit	141
8.11. Syprina dhe vëllimi i konit të cinguar	143
8.12. Sfera dhe topi. Syprina dhe vëllimi	145
PËRGJIGJE DHE UDHËZIME	151

Gjeometrikisht do ta paraqesim me të ashtuquajturën **segment i orientuar**.

Ai është segment te i cili njëra pikë llogaritet për pikë fillestare (fillimi i vektorit), kurse tjetra për të fundit (fondi i vektorit). Vektorin (d.m.th., $\overrightarrow{AB}$ segmentin e orientuar) do ta shënojmë me $\vec{AB}$ (do të thotë A llogaritet për pikë fillestare, kurse B për pikë të mbarimit) (vizatimi 3). Vizatimi 3

Gjeometrikisht do ta paraqesim me të ashtuquajturën **segment i orientuar**. Ai është segment te i cili njëra pikë llogaritet për pikë fillestare (fillimi i vektorit), kurse tjetra për të fundit (fondi i vektorit). Vektorin (d.m.th., segmentin e orientuar) do ta shënojmë me $\vec{AB}$ (do të thotë A llogaritet për pikë fillestare, kurse B për pikë të mbarimit) (vizatimi 3). Vizatimi 3

Shembulli 1. Janë dhënë katër pika të ndryshme A, B, C dhe D . Me fillim në pikën A , mund të formohen vektorët $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ dhe $\vec{AA}$. Me fillim në B , vektorët $\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}$ dhe $\vec{BB}$ etj. Përfundimisht, në këtë mënyrë, mund të formohen gjithsej 12 vektor.

Çdo vektor është përcaktuar me:

- **madhësia** e barabartë me gjatësinë e segmentit AB (d.m.th., $|\vec{AB}| = AB$),
- **drejtimi** i përcaktuar me drejtëzën AB dhe
- **kahja** prej pikës A kah pika B (d.m.th., kahja e gjysmëdrejtëzës AB). ♦

Përveç me $\vec{AB}$, vektorët do t'i shënojmë edhe me $-\vec{AB}$, kurse madhësitë e tyre me $|\vec{AB}|$ ose me AB . Madhësinë e vektorit do ta quajmë edhe **gjatësia e vektorit** (intensiteti ose moduli i vektorit).

Për vektorët $\vec{AB}$ dhe $\vec{CD}$ themi se kanë:

- **madhësi të barabarta**, nëse $AB = CD$ dhe shkruajmë $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$,
- **drejtim të njëjtë**, nëse AB dhe CD janë drejtëza paralele (ose AB dhe CD janë drejtëza, të cilat puthiten), dhe shkruajmë $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$,
- **kahe të njëjtë**, nëse gjysmëdrejtëzat AB dhe CD kanë kahe të njëjtë dhe shkruajmë $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$.

kahe të kundërt, nëse gjysmëdrejtëzat AB dhe CD kanë kahe të kundërta dhe shkruajmë $\vec{AB} \nparallel \vec{CD}$.

Përkufizimi. Vektorët, të cilët kanë drejtim të njëjtë, do t'i quajmë **kolinear**.

Vektori, i cili ka gjatësinë 0, do ta quajmë **vektor zero** dhe do ta shënojmë me $\vec{0}$ ose me 0 d.m.th., do të shfrytëzojmë pikën e njëjtë fillestare dhe të fundit. Ai vektor ka drejtim të njëjtë dhe kahe të njëjtë me çdo vektor.

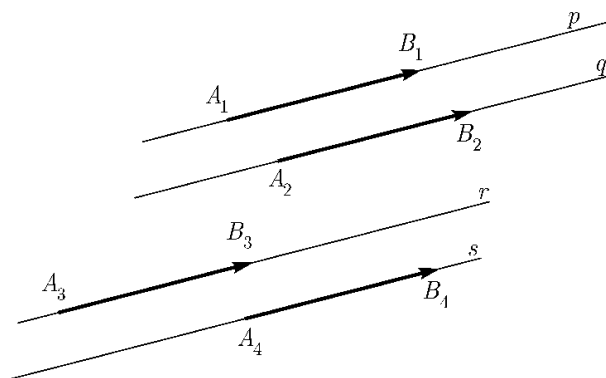
Vektori, i cili ka gjatësinë 1, do ta quajmë **vektor njësi** ose **ort**.

Përkufizimi. Për dy vektor $\vec{AB}$ dhe $\vec{CD}$ do të themi se janë **të barabartë** $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Nëse kanë madhësi të barabarta, drejtim të njëjtë dhe kahe të njëjtë.

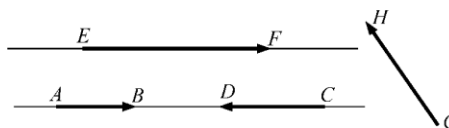
Kështu, vektorët $\vec{A_1B_1}, \vec{A_2B_2}, \vec{A_3B_3}$ edhe te vizatimi 4 janë të barabartë. Poashtu drejtëzat p, q, r dhe s janë paralele dhe gjatësitë e segmenteve A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 dhe A_4B_4 janë të barabarta.

Vizatimi 4



Përkufizimi: Dy vektor dhe janë të kundërt. Nëse kanë madhësi të njëjtë, drejtim të njëjtë dhe kahe të kundërt.

Shembulli 2. Te vizatimi 5 janë paraqitur dy drejtëza paralele. Vektorët dhe janë kolinear ndërmjet veti, kurse vektori . Nuk është kolinear me asnjërin prej tyre. Vektorët dhe



janë të kundërt, kurse nuk janë të kundërt njëri në tjetrin. ♦ Vizatimi 5

Detyra 1. Le të jetë $ABCD$ paralelogram dhe O është prerja e diagonaleve të tij (vizatimi 6). Cakto cilat prej këtyre çifteve të vektorëve janë të barabartë, kurse cilët janë të kundërt.

a) b) c) ç) d)

Zgjidhja. a) Vektorët dhe janë të kundërt,

b) Vektorët dhe janë të barabartë,

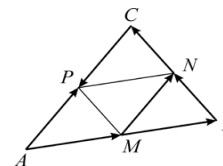
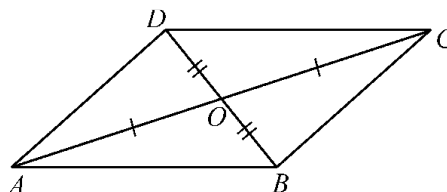
c) Vektorët dhe janë të kundërt,

Vizatimi 6

ç) Vektorët dhe janë kolinear, nuk janë të barabartë,

as të kundërt,

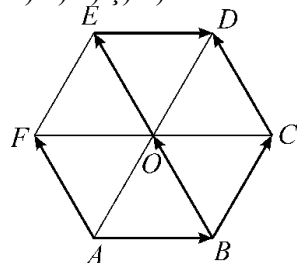
d) Vektorët dhe janë të kundërt. ♦



Detyra

1. Le të jetë ABC trekëndësh dhe M, N, P janë meset e brinjëve të AB, BC, CA , përkatësisht (vizatimi 7). Cilat prej këtyre barazimeve janë të sakta:

a) b) c) ç) d)



2. Le të jetë $ABCDEF$ gjashtëkëndësh i rregullt dhe O është qendra e vijës rrethore të jashtëshkruar (vizatimi 8). Cilat prej këtyre barazimeve janë të sakta:

a) b) c) ç)

3. Te brinjët e katrorit $ABCD$ janë dhënë disa vektor (vizatimi 9). Përmend cilat prej tyre janë:

a) kolinear, b) me kahe të njëjtë,

c) të barabartë, ç) të kundërt.

Vizatimi 7 Vizatimi 8 Vizatimi 9 Vizatimi 10

